האוניברסיטה העברית בירושלים
הפקולטה לחקלאות, מזון וסביבה
ע״ש רוברט ה. סמית

חוברת הכנה ללימודי המתמטיקה בפקולטה

ד״ר יהודית ריבלין

רחובות, תשע״ז

הקדמה

חוברת זו משמשת כחוברת מלווה למכינת הקיץ ולקורס ההשלמה במתמטיקה של המדור ללימודי חוץ. היא כוללת את תמצית חומר הלימוד באלגברה ובטריגונומטריה הנדרש ללימודי המתמטיקה בפקולטה ושאלות לתרגול.
בסוף החוברת מופיעות תשובות לתרגילים נבחרים.
החוברת מתאימה גם ללימוד עצמי.

יהודית ריבלין
רחובות 2016

*החוברת היא לשימוש פנימי בלבד

תוכן העניינים

פרק 1: כתיבה מדעית של מספרים, שגיאה מוחלטת ושגיאה יחסית

הערה:הנושאים הנלמדים בפרק זה דרושים בתחילת הקורס בכימיה הנלמד בשנה א' ולכן הוא מופיע ראשון. (מבחינת סדר הנושאים הוא אמור להופיע לאחר פרק 11.)

בקורסים מדעיים, כאשר יש צורך להציג מספרים גדולים מאוד או קטנים מאוד נהוג להשתמש בצורת הצגה הנקראת הצגה מדעית של מספר.

הגדרה: הצגה מדעית של מספרים-זוהי הצגה מהצורה: $a\cdot 10^n$, כאשר $1\le a<10$, n מספר שלם – חיובי, שלילי או אפס.

דוגמא: $235.775=2.35775\cdot 10^2$.

- כללי כפל וחילוק של מספרים המוצגים מדעית:

$$\left(a\cdot 10^n\right)\cdot\left(b\cdot 10^m\right)=\left(a\cdot b\right)\cdot\left(10^{n+m}\right)$$
$$\frac{\left(a\cdot 10^n\right)}{\left(b\cdot 10^m\right)}=\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(10^{n-m}\right)$$

דוגמאות:

$$\left(5\cdot 10^3\right)\cdot\left(5\cdot 10^2\right)=\left(5\cdot 5\right)\cdot\left(10^3\cdot 10^2\right)=25\cdot 10^5=2.5\cdot 10^6$$
$$\frac{\left(5\cdot 10^3\right)}{\left(5\cdot 10^2\right)}=\left(\frac{5}{5}\right)\cdot 10^1=10$$

- כללי חיבור וחיסור של מספרים המוצגים מדעית:

א. במספרים שחזקות העשר שלהם שוות, מחברים או מחסרים את המקדמים.

דוגמא: $3\cdot 10^5+9.5\cdot 10^5=\left(3+9.5\right)\cdot 10^5=12.5\cdot 10^5=1.25\cdot 10^6$

ב. כאשר א' אינו מתקיים, יש בשלב ראשון להשוות את חזקות העשר של המספרים.

דוגמא: $5\cdot 10^3+5\cdot 10^2=50\cdot 10^2+5\cdot 10^2=55\cdot 10^2=5.5\cdot 10^3$

או $5\cdot 10^3+5\cdot 10^2=5\cdot 10^3+0.5\cdot 10^3=5.5\cdot 10^3$

- לוגריתם עשרוני של: $a\cdot 10^n$ $\log_{10}\left(a\cdot 10^n\right)$

הלוגריתם העשרוני של a הוא מספר b המקיים $10^b=a$.

רושמים $b=\log_{10}a$, או $b=\log a$, או $b=\lg a$.

הלוגריתם של מספר $1<a<10$ הוא מספר אי-רציונאלי בין 0 ל- 1, ואפשר להציג רק קרוב עשרוני שלו. קרוב ללוגריתם מוצאים בעזרת המחשב. למשל: $\log 3\approx 0.4771$.

בדיוק של 4 ספרות אחרי הנקודה $\log 3=0.4771$.

מכללי הלוגריתמים (עמ' 42) נובע כי : $\log\left(a\cdot 10^{n}\right)=\log a+\log 10^{n}=\log a+n$.

דוגמא: בדיוק של 4 ספרות אחרי הנקודה :

$$\log\left(3\cdot 10^{5}\right)=\log 3+5=0.4771+5=5.4771$$

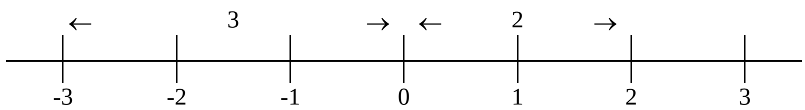
$$\log\left(3\cdot 10^{-7}\right)=\log 3-7=0.4771-7=-6.5229$$

-הערך המוחלט:

הערך המוחלט של מספר a בסימון $|a|$ מוגדר על ידי : $|a|=\begin{cases} a & a\geq 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$

על ציר המספרים הממשיים, $|a|$ הוא המרחק של a מהאפס, בלי להתחשב במקום של a (מימין או משמאל לאפס.)

דוגמאות: $|2|=2 \quad , \quad |-3|=3$



-רישום שגיאות – שגיאה מוחלטת ויחסית.

בפתרון מספרי של בעיה, התשובה המתקבלת היא בדרך כלל תשובה מקורבת, ולא הערך המדויק הנדרש. יש לכך 2 גורמים : שיטת החישוב, ושגיאות עגול. אם a הוא ה פתרון המדויק לבעיה, $\bar{a}$ הוא הפתרון המקורב אזי נסמן :

השגיאה המוחלטת Δa **היא:** $\Delta a=\left|\bar{a}-a\right|$ (Δ-האות היוונית דלתה.)

השגיאה היחסית היא: $\dfrac{\Delta a}{a}$

השגיאה היחסית באחוזים היא: $A=\left(\dfrac{\Delta a}{a}\right)*100$

תרגילים לפרק 1

1) הציגו את המספרים שלהלן בצורה מדעית: $372000;\ 0.00372;\ 37.2;\ 3.72$.

2) רשמו את המספרים הבאים בלי להשתמש בצורה מדעית:

$$1.28\cdot10^{3}\ ;\quad 1.28\cdot10^{-2}\ ;\quad 10^{-5}\ ;\quad -3.2\cdot10^{-3}$$

3) בצעו את פעולות החשבון שלהלן:

א. $9.42\cdot10^{-2}+7.6\cdot10^{-3}$

ב. $3.142\cdot10^{-4}-2.8\cdot10^{-6}$

ג. $\left(7.2\cdot10^{2}\right)\cdot\left(2.4\cdot10^{3}\right)$

ד. $\left(7.2\cdot10^{2}\right)/\left(2.4\cdot10^{3}\right)$

4) חישבו את הלוגריתם העשרוני של המספרים הבאים. השתמשו במחשב בכדי למצוא קרוב של 3 ספרות אחרי הנקודה ל- $\log 5$. רשמו את התוצאה בדיוק של 3 ספרות אחרי הנקודה.

$$\log\left(5\cdot10^{-3}\right)\ ;\quad \log\left(5\cdot10^{3}\right)\ ;\quad \log\left(5\cdot10^{-8}\right)\ ;\quad \log\left(5\cdot10^{8}\right)$$

5) רשמו את השגיאה המוחלטת והשגיאה היחסית באחוזים המתקבלת כאשר:

	הערך המדויק הוא:	הערך המקורב הוא:
א.	$a=2$	$\bar{a}=2.01$
ב.	$a=2$	$\bar{a}=1.98$
ג.	$a=2\cdot10^{3}$	$\bar{a}=2.1\cdot10^{3}$
ד.	$a=2\cdot10^{-4}$	$\bar{a}=1.99\cdot10^{-4}$

6) רשמו את הערך המוחלט של המספרים: $-1\ ,\ -3/4\ ,\ 0\ ,\ 3/4\ ,\ 1\ ,\ -0.05$.

פרק 1*: קבוצות של מספרים ממשיים

קבוצה היא אוסף של איברים. אנו נגדיר כאן את הקבוצות הבסיסיות של המספרים הממשיים.

קבוצת **המספרים הטבעיים** המסומנת באות N זוהי קבוצת המספרים השלמים וחיוביים, כלומר: $N=\{1,2,3,......n,.....\}$. n מסמן בדרך כלל מספר טבעי כלשהו.

קבוצת **המספרים השלמים** שאותה מקובל לסמן באות Z היא: $Z=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$.

קבוצת **המספרים הרציונלים** המסומנת באות Q, היא הקבוצה הכוללת בתוכה את כל מנות המספרים השלמים כלומר: $Q=\left\{\frac{m}{n}: n\neq 0, n,m\in Z\right\}$.

כל מספר שלם k הוא מספר רציונלי כי ניתן להציגו כך: $k=\frac{k}{1}$. ההיפך כמובן אינו נכון. המספר $\frac{1}{2}$ הוא מספר רציונלי אך אינו מספר שלם.

אך מתברר שאם נסדר את המספרים הרציונלים על ציר מספרים, יישארו מעין "חורים".

את החורים הללו ממלאים מספרים הנקראים **המספרים האי- רציונלים**. אלו מספרים שאינם ניתנים להצגה כמנה של מספרים שלמים. לדוגמא המספר $\sqrt{2}$ הוא מספר אי רציונלי.

קבוצת כל המספרים הרציונלים והאי-רציונלים נקראת קבוצת **המספרים הממשיים** ומסומנת באות R $R=\{x:-\infty<x<\infty\}$.

על ציר המספרים, ניתן להתאים לכל נקודה מספר ממשי וההיפך, כלומר לכל מספר ממשי ניתן להתאים נקודה על ציר המספרים.

על ציר המספרים הממשי קיימים קטעים מסוגים שונים:

קטעים סופיים- קטע סופי הוא קטע שקצותיו הם מספרים סופיים. קיימים קטעים מסוגים שונים:

הקטע הסגור $[a,b]$-זהו קטע הכולל את כל המספרים הממשיים הנמצאים מ- a (כולל a) עד ל- b (כולל b) כלומר: $[a,b]=\{x: a\leq x\leq b\}$.

הקטע הפתוח (a,b)- זהו קטע הכולל את כל המספרים הממשיים הנמצאים בין- a ל- b כלומר: $(a,b)=\{x: a<x<b\}$.

הקטע החצי פתוח (חצי סגור) $(a,b]$- זהו קטע הכולל את כל המספרים הממשיים הנמצאים בין- a עד ל- b (כולל b) כלומר: $(a,b]=\{x: a<x\leq b\}$.

הקטע החצי סגור (חצי פתוח) $[a,b)$ - זהו קטע הכולל את כל המספרים הממשיים הנמצאים

מ- a (כולל a) ל- b כלומר : $[a,b)=\{x: a\le x<b\}$.

קטעים אינסופיים: קטע אינסופי זהו קטע אשר לפחות אחד מקצותיו הוא באינסוף.

לדוגמא : $(a,\infty)=\{x: a<x\}$; $(-\infty,b)=\{x: x<b\}$; $R=(-\infty,\infty)=\{x: -\infty<x<\infty\}$;

- על קבוצת המספרים הממשיים מוגדרות ארבע פעולות חשבון בסיסיות :חיבור,חיסור, כפל וחילוק. פעולות אלו מקיימות את הכללים היסודיים הבאים :

א. $a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$; זהו כלל הקומוטטיביות.

ב. $(a+b)+c=a+(b+c)$; $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$; זהו חוק האסוציאטיביות.

ג. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$; זהו חוק הדיסטריבוטיביות.

ד. $a+0=a$; $a\cdot 1=a$;

ה. לכל מספר a קיים מספר נגדי $-a$ כך ש : $a+(-a)=0$;

- פעולת החילוק היא פעולה מוגבלת : **אסור לחלק במספר 0** ומכאן הכללים הבאים :

ו. לכל מספר $a\neq 0$ קיים איבר הופכי המסומן ב- a^{-1} כך ש : $\frac{a}{a}=a\cdot\left(a^{-1}\right)=1$;

ז. לכל $b,c\neq 0$ קיים : $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$; $\frac{a}{b}=\frac{a/c}{b/c}$;

ח. לכל $b,d\neq 0$ קיים : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$;

ט. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$;

תרגילים לפרק 1*

1. אילו מהמשוואות הבאות ניתן לפתור בקבוצת המספרים הטבעיים ואילו לא ניתן?

א. $a+5=8$; ב. $a+8=5$; ג. $a+5=5$; ד. $a+8=0$;

2. עבור אילו ערכים של n ניתן לפתור את המשוואות הבאות בקבוצת המספרים הטבעיים?
(m מספר שלם כלשהו נתון.)

א. $x+n=3$; ב. $x+2=n$; ג. $x+n=m$; ד. $x+m=n$;

3. לאילו מהמשוואות הבאות יש פתרון שהוא בקבוצת המספרים השלמים ולאילו לא?

א. $0\cdot x=3$; ב. $6x=3$; ג. $2x=0$; ד. $3x=6$;

4. אילו מהניסוחים מתארים נכון את השיוויונים הבאים ? (תיתכן יותר מתשובה נכונה אחת)

I. $a=b-2$

א. b גדול ב-2 מ- a ; ב. a גדול ב-2 מ- b ;

ג. a קטן ב-2 מ- b ; ד. b קטן ב-2 מ- a ;

II. $b=a+3$

א. a קטן ב-3 מ- b ; ב. a גדול ב-3 מ- b ;

ג. b קטן ב-3 מ- a ; ד. b גדול ב-3 מ- a ;

III. $a-b=4$

א. a קטן ב-4 מ- b ; ב. b קטן ב-4 מ- a ;

ג. a גדול ב-4 מ- b ; ד. b גדול ב-4 מ- a ;

5. אילו מהתבניות מציינות נכון את העובדות הבאות (תיתכן יותר מתשובה אחת נכונה) :

I. a גדול ב-5 מ- b ;

א. $a+5=b$; ב. $a-5=b$; ג. $b+5=a$;

ד. $a=b-5$; ה. $a-b=5$; ו. $a>b+5$;

II. a קטן ב-3 מ- b ;

א. $a<b+3$; ב. $a-3=b$; ג. $a+3=b$;

ד. $a=b+3$; ה. $a=b-3$; ו. $a-b=3$;

6. נתון כי $\frac{a}{b}=2$. איזו מהטענות הבאות נכונות? (תיתכן יותר מתשובה אחת נכונה).

א. a גדול מ- b פי-2 ; ב. a קטן מ- b פי-2 ;

ג. b הוא $\frac{1}{2}$ מ- a ; ד. a הוא $\frac{1}{2}$ מ- b ;

7. תארו את כל אחת מהקבוצות שלפניכם בצורת קטע :

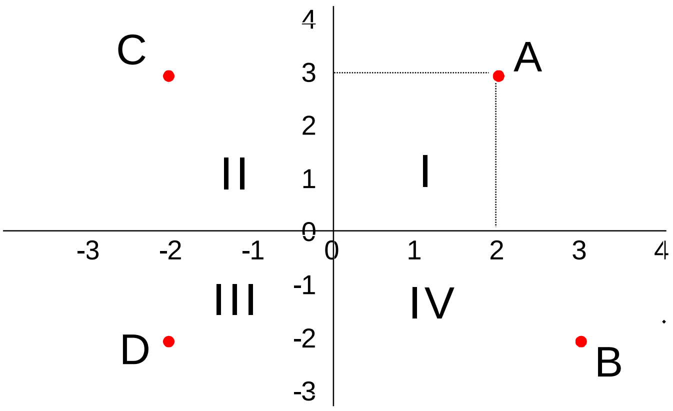
א. $\{x:-1\le x\le 5\}$; ב. $\{x:x^3>64\}$;

ג. $\{x:x^2\le 64\}$; ד. $\{x:1+x<0\}$;

פרק 2: נקודות וישרים במישור

נקודה במישור מאופיינת על ידי זוג של מספרים ממשיים, שהם הקואורדינטות של הנקודה. אם p היא הנקודה (x_0, y_0) אז הקואורדינטה x_0 היא ההיטל של p על הציר האופקי, והקואורדינטה y_0 היא ההיטל של p על הציר האנכי.

בשרטוט שלהלן מסומנות הנקודות
$A(2,3)$, $B(3,-2)$, $C(-2,3)$, $D(-2,-2)$
וכן ראשית הצירים, שהקואורדינטות שלה $(0,0)$.
הצירים מחלקים את המישור לארבעה רבעים
המסומנים בשרטוט.
מקובל לסמן את אוסף כל הנקודות במישור על ידי R^2.



המרחק בין שתי נקודות. תהיינה p_1 ו- p_2 הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) בהתאמה. המרחק בין הנקודות הוא: $d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

דוגמאות עבור הנקודות שבשרטוט:

$$d(A,B) = \sqrt{(2-3)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{26} \quad ; \quad d(A,C) = \sqrt{(2-(-2))^2 + (3-3)^2} = \sqrt{16} = 4$$

שיפוע הישר העובר בין שתי נקודות. תהיינה p_1 ו- p_2 הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) בהתאמה. שיפוע הישר העובר בין הנקודות הוא: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. הוא מוגדר בתנאי ש: $y_1 \neq y_2$

הערה: יש לשים לב לכך ששיפוע הישר **אינו** הזווית שהישר יוצר עם הצירים.

דוגמאות: שיפוע הישר המחבר את A ו- D: $m_{AD} = \dfrac{3-(-2)}{2-(-2)} = \dfrac{5}{4}$

שיפוע הישר המחבר את A ו- B: $m_{AB} = \dfrac{3-(-2)}{2-3} = \dfrac{5}{-1} = -5$

שיפוע הישר המחבר את A ו- C: $m_{AC} = \dfrac{3-3}{2-(-2)} = \dfrac{0}{4} = 0$

מקרה מיוחד: הישר המחבר את C ואת D מקביל לציר ה- y. במקרה זה $x_2 - x_1 = -2-(-2) = 0$ והנוסחה לא ישימה. (אסור לחלק באפס!) במקרה זה אומרים ששיפוע הישר לא מוגדר.

משוואת הישר העובר דרך (x_0, y_0) ושיפועו m היא: $y = y_0 + m(x - x_0)$.

דוגמא: הישר העובר דרך A ושיפועו -5 מיוצג על ידי הנוסחה:

$$y = 3 + (-5)(x-2) = 3 - 5(x-2)$$

משוואת הישר העובר דרך $(0,b)$ ושיפועו a היא: $y = b + a(x-0) = ax + b$.

דוגמא: משוואת הישר ששיפועו 3 והוא חותך את ציר ה- y בנקודה בה $y=-2$ היא:

$$y = 3x - 2$$

הערה: כל הישרים ששיפועם סופי ניתנים להצגה בעזרת הנוסחה $y = ax + b$.

אם הישר מקביל לציר ה- x שיפועו 0 והנוסחה המתקבלת היא $y = b$. בפרט, משוואת הישר המתאר את ציר ה- x היא: $y = 0$.

הישרים המקבילים לציר ה- y אינם ניתנים להצגה בעזרת הנוסחה הנ"ל.

ישרים אלה מיוצגים על ידי הנוסחה $x = x_0$ למשל, נוסחת הישר המחבר את C ו- D שבשרטוט היא $x = -2$.

הנוסחה הכללית שבעזרתה ניתן לייצג את כל הישרים היא $Ax + By + C = 0$.

תרגילים לפרק 2

1) מצאו את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(1,4)$ ושיפועו 2.

2). א. מצאו את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(0,1)$ ושיפועו $-1/4$.

ב. מצאו את משוואת הישר העובר דרך $(1,0)$ ושיפועו $-1/4$.

3) להלן נתונים חמישה זוגות של נקודות:

(I) (3,2) ו- (6,4) ; (II) (3,2) ו- (6,-4)

(III) (-3,-2) ו- (-6,4) ; (IV) (3,4) ו- (3,-2)

(V) (-3,2) ו- (6,2) .

עבור כל זוג נקודות ענו על הסעיפים הבאים:

א. סמנו את הנקודות במערכת צירים. (כולן באותה מערכת צירים.)

ב. חשבו את המרחק בין כל זוג נקודות.

ג. מהו שיפוע הישר המחבר את הנקודות? מהי משוואת הישר? שרטטו ישר זה.

ד. עבור כל אחד מהישרים שמצאתם בסעיף ג' בדקו אילו מבין הנקודות $(3,-14),(-5,2),(-6,-4)$ נמצאות על הישר?

ה. בדקו, על פי השרטוט, אלו מהישרים שמצאתם מקבילים זה לזה.

4) א. מהו שיפוע הישר העובר דרך הנקודות $(2,3)$ ו- $(4,0)$?

ב. מהו שיפוע הישר העובר דרך הנקודות $(1,3)$ ו- $(1,8)$?

ג. מהו שיפוע הישר העובר דרך הנקודות $(0,2)$ ו- $(4,2)$?

5) א. האם קיים ישר העובר דרך הנקודות $(0,-1)$, $(1,3)$, $(2,8)$? אם כן מצאו את משוואתו. אם לא הסבירו מדוע.

ב. אותה השאלה עבור הנקודות $(3,1)$, $(1,4)$, $(2,-3)$.

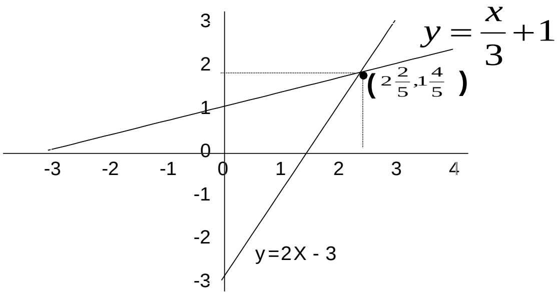
פרק 3: משוואות ממעלה 1 וחיתוך של ישרים

פתרון משוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax+b=0$, $a\neq 0$.

פתרון המשוואה: $ax=-b \Rightarrow x=-b/a$

הנקודה $(-b/a\ ,0)$ היא נקודת החיתוך של הישר $y=ax+b$ עם ציר ה- x.

דוגמא: נקודת החיתוך של הישר $y=2x-3$ עם ציר ה- x, כפי שרואים בשרטוט, היא $(3/2,0)$.



פתרון משוואה מהצורה: $ax+b=cx+d$.

שלב ראשון- העברת אגפים: $ax-cx=d-b$

שלב שני – כינוס אברים: $(a-c)x=d-b$

שלב שלישי – חילוץ הנעלם: $x=(d-b)/(a-c)$

השלב השלישי יכול להיעשות אם ורק אם $a-c\neq 0$. אחרת, בד"כ למשוואה אין פתרון. אם במקרה גם $d-b=0$, אז אגף שמאל זהה לאגף ימין והשוויון מתקיים לכל ערך של x.

פתרון המשוואה נותן את הקואורדינטה הראשונה של נקודת החיתוך של הישרים $y=ax+b$ ו- $y=cx+d$. אם $a=c$ הישרים אינם נחתכים, כלומר, אילו ישרים מקבילים. **לישרים מקבילים יש אותו שיפוע** (המקדם של x.) אם $a=c$ ו- $b=d$ הישרים מתלכדים.

דוגמאות:

(i) $2x-3=x/3+1 \Rightarrow 2x-\frac{x}{3}=1+3 \Rightarrow \frac{5}{3}x=4 \Rightarrow x=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$.

נקודת החיתוך של הישרים $y=2x-3$ ו- $y=\frac{x}{3}+1$ היא $\left(2\frac{2}{5},1\frac{4}{5}\right)$ (ראה שרטוט)

(ii) לישרים $y=2x-3$ ו- $y=2x+2$ יש אותו שיפוע. אלה ישרים מקבילים, כלומר הם אינם נחתכים. ואכן למשוואה $2x+2=2x-3$ אין פתרון.

תרגילים לפרק 3

1) משוואות הישרים שבשאלה 3 בפרק 2 הן (מלבד (IV)):

(I) $y=\frac{2}{3}x$, (II) $y=8-2x$, (III) $y=-8-2x$, (V) $y=2$.

א. מהן נקודות החיתוך של הישרים עם ציר ה- x ?

ב. מהן נקודות החיתוך של כל שניים מהישרים?

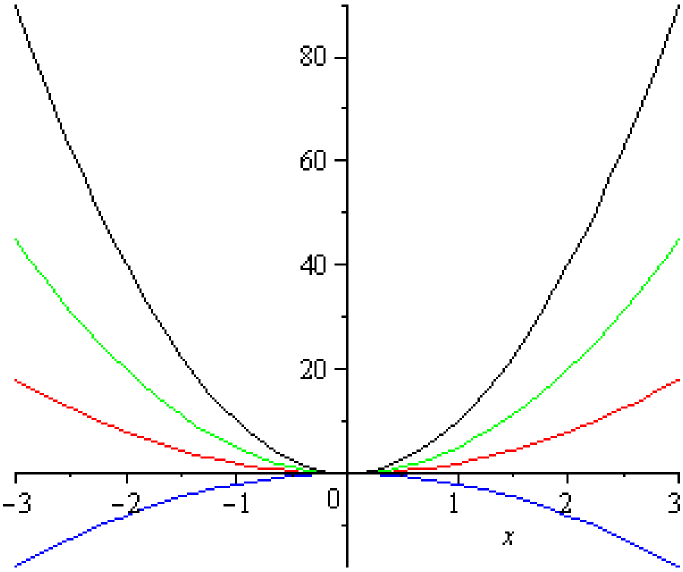
2) א. מצאו את משוואת הישר המקביל ל- $y=-2x$ ועובר בנקודה $(1,2)$.

ג. מצאו את נקודת החיתוך של ישר זה עם הישר $y=5x-3$.

3) נתונים 3 ישרים: $y=ax+2$, $y+x=1$, $y=3x-2$ מצאו את הערך של a
אם ידוע ששלושת הישרים נחתכים בנקודה אחת.

פרק 4: פרבולות – פונקציות ריבועיות

הפרבולה $y = Ax^2$, $A \neq 0$.



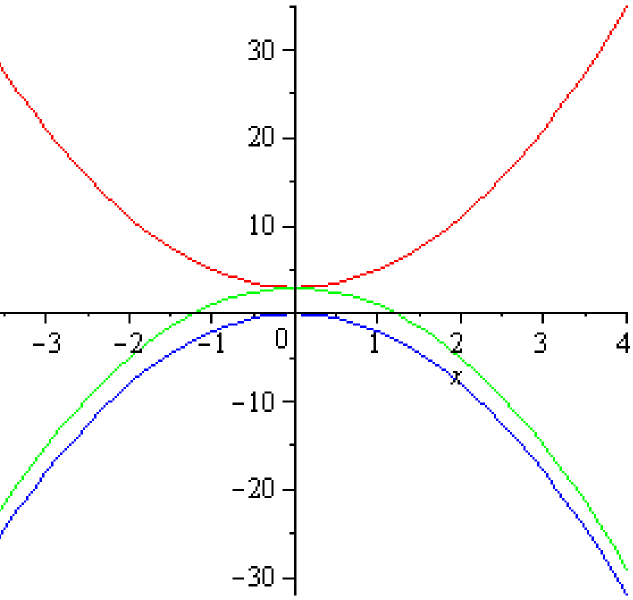
אלו פרבולות סימטריות ביחס לציר ה- y, העוברות בראשית הצירים $(0,0)$.

כאשר $A>0 \Leftarrow (0,0)$ היא נקודת המינימום של הפרבולה.

כאשר $A<0 \Leftarrow (0,0)$ היא נקודת המכסימום של הפרבולה.

ככל שהערך של $|A|$ גדול יותר הפרבולה "סגורה" יותר, כפי שרואים בשרטוט.

הפרבולה $y = Ax^2 + B$, $A \neq 0$.



פרבולה זו מתקבלת מהזזת הפרבולה $y = Ax^2$ B יחידות באורך ציר ה- y

כאשר $A>0$ $(A<0)$ לפרבולה יש מינימום (מכסימום) בנקודה $(0,B)$.

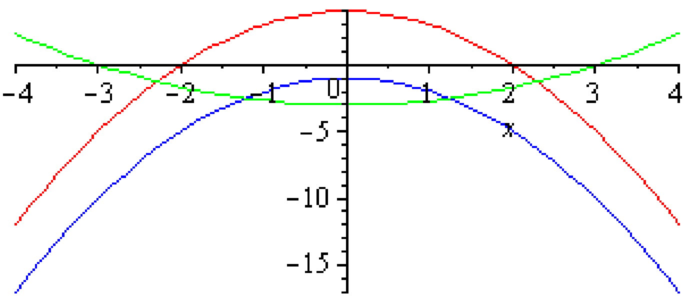
כאשר ל- A ו- B אותו סימן, הפרבולה אינה חותכת את ציר ה- x בשתי נקודות כאשר A ו B הפוכים בסימן הפרבולה חותכת את ציר ה- x בשתי הנקודות:

$\left(\sqrt{-B/A},0\right)$ ו- $\left(-\sqrt{-B/A},0\right)$

דוגמאות: (ראה שרטוט.)

(i) לפרבולה $y=4-x^2$ יש מכסימום בנקודה $(0,4)$ והיא חותכת את ציר ה- x ב- $(\pm 2,0)$.

(ii) לפרבולה $y=-x^2-1$ יש מכסימום ב- $(0,-1)$, והיא אינה חותכת את ציר ה- x.



(iii) לפרבולה $y=\frac{1}{3}x^2-3$ יש מינימום ב- $(0,-3)$, והיא חותכת את ציר ה- x ב- $(\pm 3,0)$.

הפרבולה $y=A(x-x_0)^2+B$, $A\neq 0$.

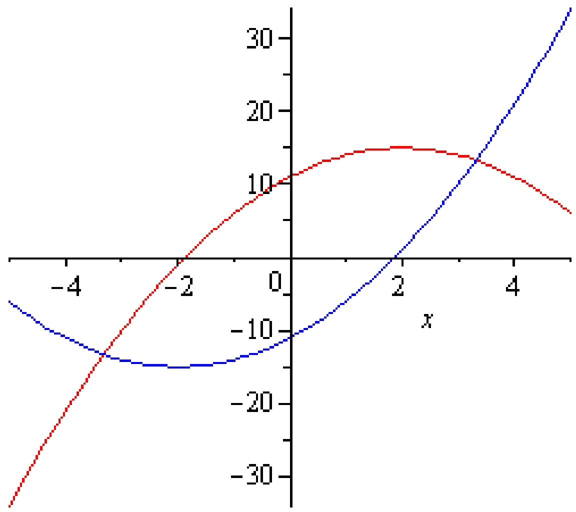
פרבולה זו מתקבלת מהזזת הפרבולה $y=Ax^2+B$ x_0 יחידות בכיוון ציר ה- x.

כאשר $A>0$ לפרבולה יש מינימום בנקודה (x_0,B).

כאשר $A<0$ לפרבולה מכסימום בנקודה (x_0,B).

כאשר ל- A ו- B אותם סימנים הפרבולה אינה חותכת את ציר ה- x אחרת היא חותכת את ציר ה- x בנקודות ששיעורי x שלהן הם:

$$x_1=x_0+\sqrt{-B/A} \quad , \quad x_2=x_0-\sqrt{-B/A}$$



דוגמאות (הזזות של הפונקציות המופיעות בראש העמוד)

(i) $y=4-(x-1)^2$. לפרבולה מכסימום בנקודה $(1,4)$. בכדי למצוא את נקודת החיתוך עם ציר ה- x פותרים המשוואה $4-(x-1)^2=0 \quad \Leftarrow \quad (x-1)^2=4$.

פתרון אחד: $x-1=2 \quad \Leftarrow \quad x=3$, פתרון שני: $x-1=-2 \quad \Leftarrow \quad x=-1$

(ii) $y=\frac{1}{3}(x+1)^2-3$. לפרבולה מינימום בנקודה (-1,-3).

לנקודת החיתוך עם ציר ה- x : $\frac{1}{3}(x+1)^2=3 \quad \Leftarrow \quad (x+1)^2=9 \quad \Leftarrow \quad x+1=\pm 3$.

נקודת חיתוך ראשונה (2,0), נקודת חיתוך שניה (-4,0).

הפרבולה הכללית: $y=ax^2+bx+c \quad , \quad a\neq 0$.

הצורה הנ"ל מתקבלת מפתיחת הסוגריים בהצגה $y=A(x-x_0)^2+B$.

הקשר בין הפרמטרים: $a=A \quad , \quad b=-2Ax_0 \quad , \quad c=B+Ax_0^2$.

דוגמאות: הפרבולה $y=\frac{1}{3}(x+1)^2-3$ תיכתב כ- $y=\frac{x^2}{3}+\frac{2}{3}\cdot x-2\frac{2}{3}$

לפרבולה $y=ax^2+bx+c$ יש מינימום (מכסימום) אם $a>0 \quad (a<0)$.

הקואורדינטות של נקודת הקיצון (מכסימום או מינימום) הן: $\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$.

פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0 \quad , \quad a\neq 0$.

פתרונות המשוואה הם שיעורי x של נקודות החיתוך של הפרבולה $y=ax^2+bx+c$ עם ציר ה- x . קיום פתרונות תלוי בסימן של הגודל $\Delta=b^2-4ac$.

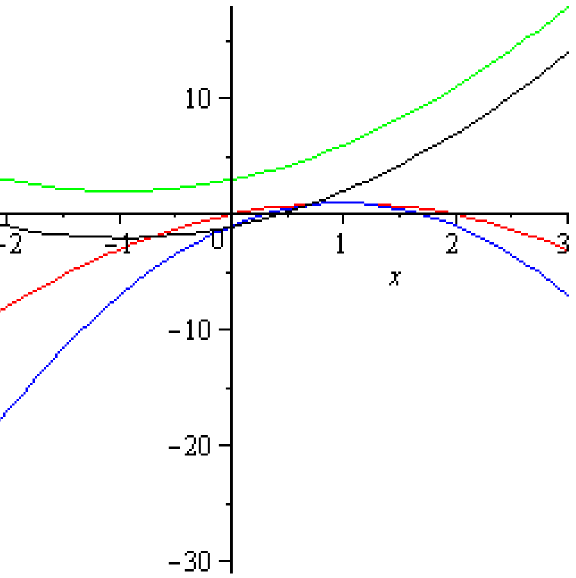
(i) $\Delta>0 \Leftarrow$ למשוואה יש שני פתרונות $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

(ii) $\Delta=0 \Leftarrow$ למשוואה פתרון אחד (פתרון כפול) $x=-\frac{b}{2a}$

(iii) $\Delta<0 \Leftarrow$ למשוואה אין פתרונות ממשיים כלל.

מקובל לרשום את פתרונות המשוואה בצורה $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

תרגילים לפרק 4



1) בגרף שלהלן משורטטות ארבע פרבולות.

נוסחאות הפרבולות הן :

א. $y=1-(x-1)^2$, ב. $y=2+(x+1)^2$,

ג. $y=-2+(x+1)^2$, ד. $y=1-2(x-1)^2$.

התאימו בין הגרפים לבין הנוסחאות הנתונות.

2) נתונות שתי פרבולות : (i) $y=x^2-5x+4$, (ii) $y=-2x^2+4x-2$.

א. מהן נקודות המכסימום והמינימום של הפרבולות? מהן נקודות החיתוך של הפרבולות עם ציר ה- x ? עם ציר ה- y ? שרטטו גרפים מקורבים של הפרבולות.

ב. על הפרבולה (i) מצאו את שיעור x של הנקודה הנמצאת ימינה לקיצון, ושיעור y שלה הוא 4. כמו כן, מצאו, על פרבולה זו, את שיעור x של הנקודה הנמצאת שמאלה לקיצון, ושיעור y שלה הוא 6.75 .

3) פתרו את המשוואות הבאות :

א. $2x^2-3x-2=0$; ב. $2x^2-4x+1=0$; ג. $-2x^2-4x-1=0$;

ד. $x^2+4=0$; ה. $x^2-4=0$; ו. $2x^2-3x+2=0$; ז. $x^4+2x^2-3=0$;

4) עבור אלו ערכים של m הפרבולה $y=(m-1)x^2+mx+1$ חותכת את ציר ה- x בדיוק פעמיים?

5) עבור אלו ערכים של a יש למשוואה $(2.25a-2)x^2-ax+1=0$ פתרון יחיד?

פרק 5: ביטויים אלגבריים פשוטים

כפל ביטויים אלגבריים:

חוק הפילוג טוען ש: $a(b+c)=ab+ac$.

מכאן אנו מקבלים את הכלל הבא: $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

כאשר כופלים ביטויים אלגבריים יש לאסוף את כל המכפלות של מחוברים של הגורם האחד במחוברים של הגורם האחר. לאחר מכן יש לחבר אברים דומים. כמו כן יש לשים לב לכך שכאשר יש סימן (-) לפני הסוגריים יש להפוך את הסימנים של כל המחוברים כאשר פותחים את הסוגריים.

דוגמאות:

1.) $(x-2)(x+3)=x(x+3)-2(x+3)=x^2+3x-(2x+6)=$
$x^2+3x-2x-6=x^2+x-6$

2.) $(x+y+1)(x-2y+2)=x^2-2xy+2x+yx-2y^2+2y+x-2y+2=$
$x^2-2y^2-xy+3x+2$

פרוק לגורמים:

זוהי הפעולה ההפוכה לפעולה של כפל ביטויים אלגבריים.

כללים העוזרים לביצוע הפרוק לגורמים מתוארים להלן.

א. הוצאת גורמים משותפים מחוץ לסוגרים.

דוגמאות: (i) $\underbrace{x^2+xy}_{x\text{ גורם משותף}}=x(x+y)$

(ii) $ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$

ב. אם x_1 ו- x_2 הם שורשי המשוואה $x^2+Ax+B=0$, אז מתקיים הפירוק לגורמים $x^2+Ax+B=(x-x_1)(x-x_2)$.

ג. נוסחאות של פירוק לגורמים:

(i) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

(ii) $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$

(iii) $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$

(iv) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

(v) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(vi) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(vii) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

תרגילים לפרק 5

1) בדקו, ע"י ביצוע הכפל, את נכונות הנוסחאות של הפירוק לגורמים.

2) כפלו וכנסו אברים:

א. $(x+1)(x-3)$

ב. $(2-x)(x+5)$

ג. $b(1-b)-(a+b)(a-2b)+(2a+b)(a+1)$

3) פרקו לגורמים את הביטויים הבאים:

א. a^2+3a

ב. a^2+6a+9

ג. $4a^2-4a+1$

ד. $4a^2-9$

ה. a^3b+2a^2b+ab

ו. $8b^3+12b^2+6b+1$

ז. $a^2-9+(a-3)^2$

ח. $a^2-b^2+(a+b)^2$

ט. $a(a^2-b^2)-b(a-b)^2$

י. $x^2-13x+22$

יא. $(x^3-x)+(x^2+3x-4)$

יב. $(x^3-1)+(x^2-x)$

יג. x^4-8x^2+16

יד. x^4-6x^2-16

טו. $49x^2-121x^4$

טז. a^4-b^4

יז. $18a^2b-12ab^2$

יח. $(5a+11)^2-(5a-9)^2$

יט. $(a^3-b^3)+(a^2-b^2)$

כ. $a^3+b^3+(a+b)^2$

כא. $(7x+3)^2+(49x^2-9)+(7x+3)x$

כב. $a(a+b)+2(a^2+b^2)+(a+b)^2-(a-b)^2$

4) א. x^6+2x^3+1

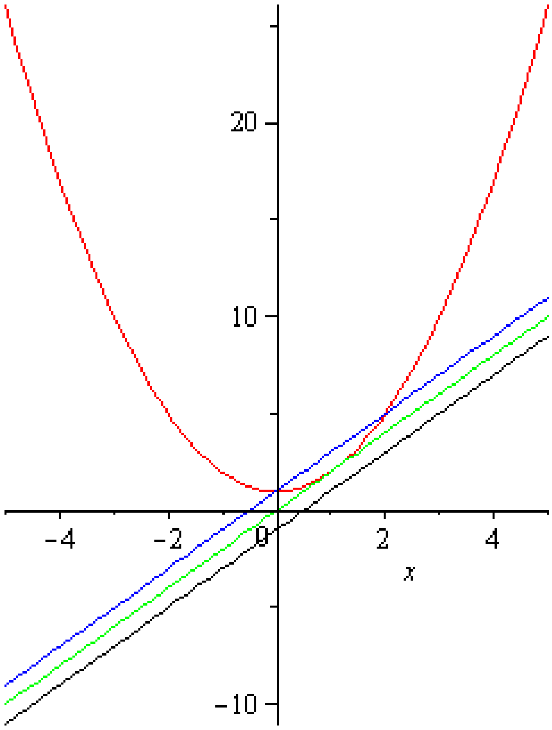
ב. x^4+2x^2-3

ג. $x^8-2x^6+2x^4-2x^2+1$

ד. $ax^2+a^2x-bx^2-b^2x$

ה. $x^4-x^3+x^2-4x+3$

פרק 6: משוואות ממעלה 2



פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=kx+l$, $a\neq 0$ **:**

לפתרון המשוואה יש להעביר את כל המחוברים לאגף אחד ולפתור את המשוואה הריבועית שמתקבלת. פתרונות המשוואה הם שיעורי x של נקודות החיתוך של הישר $y=kx+l$ והפרבולה $y=ax^2+bx+c$.

דוגמאות:

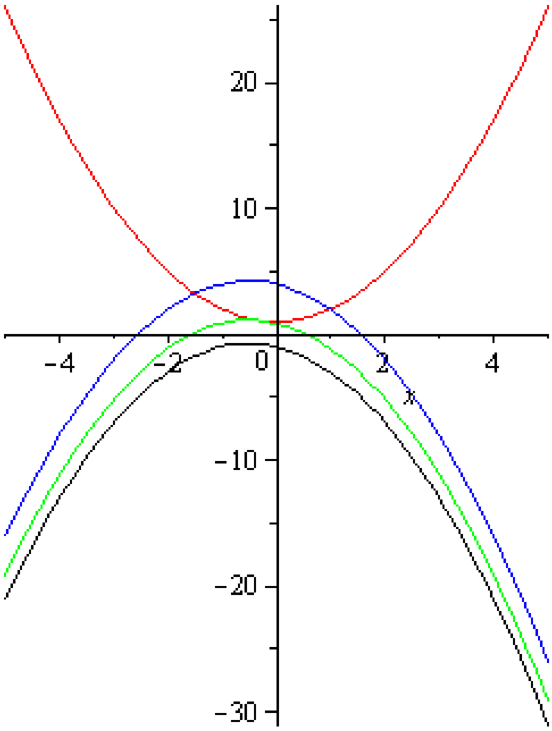
(i) $x^2+1=2x+1 \Leftarrow x^2-2x=0 \Leftarrow x_2=2, x_1=0$. נקודות החיתוך של הפרבולה $y=x^2+1$ והישר $y=2x+1$ הן $(0,1)$ ו- $(2,5)$ (ראה שרטוט).

(ii) $x^2+1=2x \Leftarrow x^2-2x+1=0 \Leftarrow x_{1,2}=1$. הישר $y=2x$ משיק לפרבולה $y=x^2+1$. נקודת ההשקה היא $(1,2)$ (ראה שרטוט).

(iii) $x^2+1=2x-1 \Leftarrow x^2-2x+2=0 \Leftarrow$ אין פתרון. לישר $y=2x-1$ אין נקודות משותפות עם הפרבולה $y=x^2+1$ (ראה שרטוט).

פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=Ax^2+Bx+C$, $a,A\neq 0$:

לפתרון המשוואה מעבירים את כל המחוברים לאגף אחד ופותרים את המשוואה הריבועית המתקבלת. פתרונות המשוואה הם שיעורי x של נקודות החיתוך של הפרבולה $y=ax^2+bx+c$ עם הפרבולה $y=Ax^2+Bx+C$.



דוגמא: בדוגמא תבחנה נקודות החיתוך של הפרבולה $y=x^2+1$ עם פרבולות אחרות. הצגה גרפית ממול.

(i) פרבולה ראשונה: $y=-x^2-x+4$. יש לפתור המשוואה

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{4} \Leftarrow 2x^2+x-3=0 \Leftarrow x^2+1=-x^2-x+4$$

נקודות החיתוך של הפרבולות: $(1,2)$, $\left(\frac{-3}{2},3\frac{1}{4}\right)$.

(ii) פרבולה שניה: $y=-x^2-x+\frac{7}{8}$ המשוואה: $x^2+1=-x^2-x+7/8$

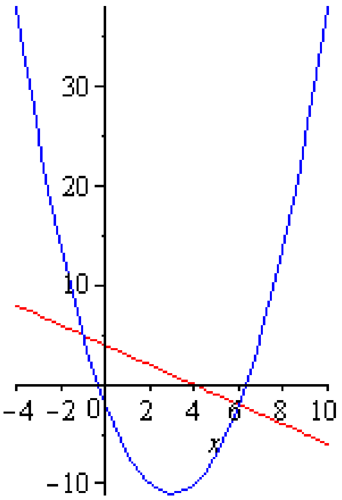
אחרי העברת אגפים: $2x^2+x+\frac{1}{8}=0$ מתקיים $\Delta=0$, ולמשוואה פתרון אחד – $x=-1/4$. הפרבולות משיקות בנקודה $\left(-\frac{1}{4},1\frac{1}{16}\right)$.

(iii) פרבולה שלישית: $y=-x^2-x-1$. המשוואה: $2x^2+x+2=0 \Leftarrow x^2+1=-x^2-x-1$.

במקרה זה $\Delta=1-16<0$. למשוואה אין פתרונות, והפרבולות אינן נחתכות.

תרגילים לפרק 6

1. בשאלה 2 של פרק 4 נתבקשתם לשרטט גרפים של הפרבולות
(ii) $y = x^2 - 5x + 4$, (ii) $y = -2x^2 + 4x - 2$. מצאו את נקודות החיתוך שלהן.



2 . בשרטוט שלפניכם משורטטים גרפים של הישר
$x + y = 4$ ושל הפרבולה $y = x^2 - 6x - 2$.

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הגרפים עם הצירים ואת נקודות החיתוך בין 2 הגרפים .

ב. עבור אילו ערכים של x הפרבולה מקבלת ערכים שליליים? עבור אילו ערכים של x הפרבולה מקבלת ערכים חיוביים?

3. פתרו את המשוואות הבאות :

א. $x^2 + x + 1 = x^2 + 2$,

ב. $x^2 + x + 1 = 2 - x^2$

ג. $x^2 + x + 1 = 2x - x^2$

פרק 7: שוויונים פולינומיאליים

יהי x משתנה $a_n,........,a_1,a_0$. קבועים כלשהם, $a_0 \neq 0$.

פולינום ממעלה n היא פונקציה מהצורה $P_n(x) = \underbrace{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}_{n+1 \text{ מחוברים}}$

המספר n המתאים לחזקה הגבוהה ביותר של x נקרא **מעלת הפולינום.** $a_n,........,a_1,a_0$

הם מקדמי הפולינום. המספר a_0 נקרא המקדם החופשי. המספר a_n נקרא המקדם המוביל.

בפרט פולינום ממעלה 0: $P_0(x) = a_0$ הוא פונקציה קבועה.

פולינום ממעלה 1: $P_1(x) = a_1 x + a_0$ הוא פונקציה לינארית.

פולינום ממעלה 2: $P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ הוא פונקציה ריבועית.

דוגמאות:

1.) הביטוי $x^3 + 3x^2 + x - 1$ הוא פולינום ממעלה 3. כאן $a_0 = -1, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 1$.

2.) הביטוי $2x^4 - x^2$ הוא פולינום ממעלה 4. כאן $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 0, a_4 = 2$.

מכפלה של n גורמים לינאריים היא פולינום ממעלה n. דוגמאות:

1.) $(x-1)(x+2)$ הוא פולינום ממעלה 2 והוא שווה ל: $P_2(x) = x^2 + x - 2$.

2.) $(x-1)(x+2)(1-2x)$ הוא פולינום ממעלה 3 והוא שווה ל: $P_3(x) = -2x^3 - x^2 + 5x - 2$

פתרון של משוואות פולינומיאליות:

א. משוואות ממעלה 1 ו- 2 פתרנו בפרקים 3 ו- 4.

ב. לפתרון משוואות ממעלה גבוהה מ-2 מבצעים את הפעולות הבאות:

(i) מפרקים את הפולינום למכפלת גורמים ממעלה ראשונה ושנייה;

(ii) הרעיון בפירוק לגורמים הוא כי מכפלת גורמים מתאפסת אם ורק אם לפחות אחד הגורמים מתאפס. כלומר: $a \cdot b \cdot c \cdot d = 0 \Leftrightarrow a = 0$ או $b = 0$ או $c = 0$ או $d = 0$.
פתרון המשוואה הוא לכן, אוסף הפתרונות של כל אחד מהגורמים בנפרד.

דוגמא: נתונה המשוואה ממעלה 3 הבאה: $x^3 - 2x^2 + x = 0$

פתרון: צריך קודם לפרק לגורמים את הפולינום: $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$

פתרונות המשוואה הם: $x = 0$ או $(x-1)^2 = 0$. מכאן שיש שני שרשים: $x_0 = 1,\ x_1 = 0$.

הערה: **כאשר הפולינום מפורק לגורמים אין לפתוח סוגריים**. במקרה זה הפתרון הוא מיידי.

דוגמאות:

(i) $(x-1)(x-2) = 0 \Leftarrow x - 1 = 0$ או $x - 2 = 0 \Leftarrow x_2 = 2, x_1 = 1$.

(ii) $(x+1)(x-3)(2x+1) = 0 \Leftarrow x + 1 = 0$ או $x - 3 = 0$ או $2x + 1 = 0 \Leftarrow$

$x_3 = -\frac{1}{2}, x_2 = 3, x_1 = -1$;

תרגילים לפרק 7

1. פתרו את המשוואות הבאות :

א. $(x-2)(x+1)=0$

ב. $(x-1)(2x+3)=0$

ג. $(2x-5)(4-3x)=(x+1)(2x-5)$

ד. $(3x+7)(x-5)+(5-x)(2x-1)=0$

ה. $x^3-9x=0$

ו. $(x-1)(x+2)(x-3)=0$

ז. $(x+2)(x^2-5)+(x+2)^2(x-1)=0$

ח. $x^2(x^2-1)+x(x-1)(x+2)=0$.

ט. $x^4-x^2-2=0$

י. $x^4-1=0$

יא. $(x^2+2x+3)(x^2-2x-3)=0$

יב. $x^3-1=0$

2 פתרו את המשוואות הבאות :

א. $x^6+2x^3+1=0$

ב. $x^4+2x^2-3=0$

ג. $x^8-2x^6+2x^4-2x^2+1=0$

פרק 7*: חלוקת פולינומים ופתרון משוואות ממעלה שלישית ומעלה

אם $P_n(x)$ ו-$Q_m(x)$ הם שני פולינומים, קל לראות כי גם הסכום $P_n(x)+Q_m(x)$, ההפרש $P_n(x)-Q_m(x)$, והכפל שלהם $P_n(x)\cdot Q_m(x)$ גם הם פולינומים.

לעומת זאת המנה שלהם $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ אינה בדרך כלל פולינום. למשל $\frac{x^4-3x^2+5}{x-2}$ אינה פולינום. כיצד מחלקים פולינומים זה בזה?

טענה: אם $P_n(x)$ פולינום ממעלה n ו-$Q_m(x)$ הוא פולינום ממעלה m ו-$n>m$, אז ניתן לחלק את $P_n(x)$ ב-$Q_m(x)$ כך: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\mathrm{T_k}(\mathrm{x})+\frac{R_l(x)}{Q_m(x)}$ כאשר $l<m$ ו-$k\le n-m$. הפולינום $R_l(x)$ נקרא השארית.

נסביר כיצד מחלקים פולינומים בעזרת הדוגמא הבאה:

$$3x^4-5x^2+x-1:x^2+3=3x^2-14$$

$$-$$

$$\underline{3x^4+9x^2}$$

$$=-14x^2+x-1$$

$$-$$

$$\underline{-14x^2\qquad -42}$$

$$=\qquad x+41$$

במקרה זה השארית היא: $x+41$ ולכן תוצאת החלוקה היא:

$$\frac{3x^4-5x^2+x-1}{x^2+3}=3x^2-14+\frac{x+41}{x^2+3}$$

להלן שלבי החלוקה:

שלב א': חלקו את החזקה הגבוהה ביותר של הפולינום המחולק בחזקה הגבוהה ביותר של הפולינום המחלק כלומר: $\frac{3x^4}{x^2}=3x^2$. רשמו את התוצאה מימין לשוויון.

שלב ב': את תוצאת החילוק שקיבלתם בסעיף א' הכפילו בפולינום המחלק. $3x^2\cdot\left(x^2+3\right)=3x^4+9x^2$. את התוצאה רשמו מתחת לפולינום המחולק.

שלב ג': החסירו מהפולינום המחולק את התוצאה משלב ב' וקבלו:

$$3x^4-5x^2+x-1-\left(3x^4+9x^2\right)=-14x^2+x-1$$

שלב ד': חזרו על שלבים א'-ג' עם הפולינום החדש שקבלתם בשלב ג'.במקרה שלנו זהו הפולינום: $-14x^2+x-1$ ומחלקים אותו במחלק: x^2+3. חלקו את החזקה הגבוהה ביותר של הפולינום המחולק בחזקה הגבוהה ביותר של הפולינום המחלק כלומר: $\frac{-14x^2}{x^2}=-14$. הוסיפו את התוצאה מימין לשוויון. כפלו את תוצאת החילוק בפולינום המחלק. $-14\cdot(x^2+3)=-14x^2-42$. את התוצאה רשמו מתחת לפולינום המחולק והחסירו .התהליך מסתיים כאשר אין שארית או כאשר השארית היא פולינום ממעלה קטנה יותר מהפולינום המחלק שהוא במקרה שלנו: x^2+3.

מקרה מיוחד הוא כאשר הפולינום המחלק הוא מהצורה: $x-a$, כאשר a מספר קבוע.

במקרה זה השארית תהיה תמיד מספר קבוע c, ואת תוצאת החילוק במקרה זה תמיד ניתן להציג בצורה: $P_n(x)=Q_m(x)\cdot(x-a)+c$.

משפט השארית: השארית מחילוק הפולינום $P_n(x)$ בפולינום $x-a$ היא $P_n(a)$, ולכן הפולינום $P_n(x)$ מתחלק בפולינום $x-a$ אם ורק אם: $P_n(a)=0$ כלומר אם ורק אם a הוא הוא שורש של הפולינום $P_n(x)$.

דוגמא: נתון הפולינום $P_3(x)=x^3-2x^2-x+2$ וידוע כי:

$P_3(2)=2^3-2\cdot 2^2-2+2=0$, כלומר 2 הוא שורש של הפולינום. נראה כי x^3-2x^2-x+2 מתחלק ב-$x-2$ ללא שארית ואכן:

$$\frac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}=x^2-1 \Rightarrow x^3-2x^2-x+2=(x^2-1)\cdot(x-2)$$

כלומר משמעות העובדה שהפולינום מתחלק ללא שארית היא ש-$x-2$ הוא אחד מגורמי הפולינום שלנו.נוכל להמשיך הלאה בפירוק לגורמים ונקבל לבסוף:

$$x^3-2x^2-x+2=(x^2-1)\cdot(x-2)=(x-1)(x+1)(x-2)$$

וכעת, משפרקנו את הפולינום לגורמים, קל לפתור את המשוואה הפולינומילית:

$$x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)=0 \Rightarrow$$

$x-1=0$, או $x+1=0$, או $x-2=0 \Leftarrow x_1=1, x_2=-1, x_3=2$.

כלומר עלינו לדעת למצוא את שורשי הפולינום.

פולינום ממעלה שנייה אנו יודעים לפרק כי אנו יודעים למצוא את השורשים שלו (אם יש לו אכן שורשים!) . ל"ניחוש" של שורשים רציונלים עבור פולינום ממעלה ≥ 3 נפעל לפי המשפט הבא:

משפט: יהי $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$ פולינום אשר כל מקדמיו הם מספרים שלמים אז אם ל- $P_n(x)$ יש שורש רציונלי $\frac{p}{q}$ (שבר מצומצם), אז p מחלק את a_0 ו- q מחלק את a_n .

דוגמא: פתרו את המשוואה $P_3(x)=x^3-3x^2+x-3=0$ **.**

פתרון: המספרים המחלקים את המקדם החופשי $a_0=-3$ הם : $\pm1,\pm3$. כיון שהמקדם המוביל $a_3=1$ ניתן להסיק שאם יש שורש רציונלי זה רק יכול להיות אחד מהמספרים השלמים הנ״ל. הצבה בפולינום מראה כי $P_3(3)=0$ ולכן זהו שורש של הפולינום.מחלוקת הפולינום ב- $x-3$ נקבל: $\frac{x^3-3x^2+x-3}{x-3}=x^2+1$ וכיון שהפולינום: x^2+1 אינו פריק נקבל סה״כ כי הפירוק לגורמים הוא: $x^3-3x^2+x-3=(x^2+1)(x-3)$ ולכן למשוואה $P_3(x)=x^3-3x^2+x-3=0$ יש רק פתרון אחד והוא: $x_1=3$.

תרגילים לפרק 7*

1. חלקו את הפולינומים:

א. $\left(3x^5+2x^2+4x+2\right):\left(x+1\right)$;

ב. $\left(x^5+x-1\right):\left(x^2+2\right)$;

ג. $\left(5x^7-2x^4+x^2-1\right):\left(x^3-3\right)$;

ד. $\left(x^4-2x^3+3x^2-x+4\right):\left(x^2+x+1\right)$;

ה. השתמשו בסעיף ד' וחשבו את: $\left(x^4-2x^3+3x^2-x+4\right):\left(x^3-1\right)$;

ו. $\left(x^5+3x^4-9x^3+x^2+5\right):\left(x^2-7x+12\right)$;

ז. $\left(x^6-5x^5+4x^2-8\right):\left(x^2-2x+1\right)$.

2. ידוע כי אחד מהשורשים של הפולינום: $x^3+3x^2-10x-24$ הוא -2.(בדקו שאכן זה כך!) מצאו את כל השורשים האחרים.

3. פתרו את המשוואות:

א. $x^3+4x^2-2x-3=0$;

ב. $8x^3+2x-10=0$;

4. מהו a אם ידוע שהפולינום x^3-3x^2+ax+2 מתחלק ב- $x+2$ ללא שארית?

5. מצאו את הערכים של a ושל b בפולינום x^3-ax^2+bx-4 אם ידוע שהוא מתחלק בפולינום $\left(x-2\right)^2$ ללא שארית.

6. מצאו את כל השורשים של:

א. $x^4+2x^3-3x^2-4x+4$;

ב. $6x^3-7x^2-43x+30$;

ג. $x^3+3x^2+\frac{5}{4}x-\frac{3}{2}$.

7. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציות:

$p(x)=2x^4-3x^3-2x^2-x$ ו- $q(x)=x^4+2x^3+5x^2-6$

פרק 8: שברים אלגבריים

צמצום שברים אלגבריים. הצמצום מבוסס על התכונה שכפל (או חילוק) מונה ומכנה של שבר באותו ביטוי אינו משנה את השבר. לפיכך ניתן לצמצם מנות בגורם משותף של המונה והמכנה.

דוגמאות:

(i) $\frac{a^2b}{ab^2}=\frac{a\cdot a\cdot b}{a\cdot b\cdot b}=\frac{a}{b}$; $\frac{ab+ac}{a^2}=\frac{a(b+c)}{a^2}=\frac{b+c}{a}$.

(ii) השבר $\frac{ab+c}{a^2}$ אינו ניתן לצמצום.

חיבור וחיסור של שברים אלגבריים

1. שברים שלהם אותו מכנה - הסכום (ההפרש) של שברים שלהם אותו מכנה הוא השבר שהמונה שלהם הוא סכום (הפרש) המונים והמכנה הוא המכנה המשותף לשניהם.
דוגמאות: (i) $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=\frac{x+y}{a}$; (ii) $\frac{x^2}{x^2+2}-\frac{2}{x^2+2}=\frac{x^2-2}{x^2+2}$.

2. כאשר למחוברים יש מכנים שונים יש, בשלב ראשון, להביאם למצב של מכנה משותף. הדבר ניתן תמיד לביצוע על-ידי הכפלה של המונה והמכנה של כל מחובר במכנה של המחובר האחר. כך: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{d\cdot b}=\frac{ad+bc}{bd}$.
דוגמא:

$$\frac{x}{(x+1)}+\frac{3}{(x+3)}=\frac{x(x+3)}{(x+1)(x+3)}+\frac{3(x+1)}{(x+3)(x+1)}=$$
$$=\frac{x(x+3)+3(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{x^2+6x+3}{(x+1)(x+3)}$$

3. לעתים,אם יש במכני המחוברים גורמים משותפים ניתן למצוא מכנה משותף קטן יותר ופשוט יותר מזה שמתקבל על-ידי כפל כל המכנים.
הכלל הוא:מכנה משותף הוא ביטוי המכיל בתוכו את כל אחד ממכני המחוברים מקוריים בנפרד .
דוגמא: $\frac{x}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$

אנו רואים כי בשני המכנים המקוריים יש גורם משותף והוא: $x+2$.

אם נפעל כמו במקרה הכללי נאמר כי המכנה המשותף הוא מכפלת שני המכנים המקוריים כלומר: $(x+1)(x+2)(x+2)(x+3)=(x+1)(x+2)^2(x+3)$ ונקבל:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{x(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+2)(x+3)}+\frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+3)(x+1)(x+2)}=$$
$$=\frac{x(x+2)(x+3)+(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)^2(x+3)}=\frac{(x+2)\left(x(x+3)+(x+1)\right)}{(x+1)(x+2)^2(x+3)}=\frac{(x+2)\left(x^2+4x+1\right)}{(x+1)(x+2)^2(x+3)}$$
$$=\frac{\left(x^2+4x+1\right)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

אולם ניתן לראות מההתחלה כי גם הביטוי : $(x+1)(x+2)(x+3)$ מקיים את הכלל שקבענו וכי גם הוא מכיל את כל אחד מהמכנים המקוריים בנפרד ולכן במקרה זה די לכפול את המונה והמכנה של המחובר הראשון ב- $(x+3)$ ושל השני ב- $(x+1)$ כך :

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{x(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{1\cdot(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=$$
$$\frac{x(x+3)+1\cdot(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{x^2+3x+x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{x^2+4x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

כפל וחילוק של שברים אלגבריים

1. בכפל של שברים אלגבריים כופלים מונה במונה ומכנה במכנה כך :

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

2. כאשר מחלקים את המספר 1 בשבר אלגברי, מתהפכים תפקידי המונה והמכנה :

$$1/(\frac{a}{b})=\frac{b}{a}.$$

3. חילוק a ב- b אקויולנטי למכפלת a ב- $\frac{1}{b}$. לפי כלל זה, השילוב בין 1. ו- 2. מאפשר

חילוק מנות :

$$(\frac{a}{b}):(\frac{c}{d})=(\frac{a}{b}).(\frac{1}{(c/d)})=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

דוגמא:

$$\frac{x+1}{x+2}:\frac{(x+1)^2}{x+3}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)(x+1)^2}=\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}.$$

תרגילים לפרק 8

1. פשטו את הביטויים שלהלן:

א. $\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}$

ב. $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}+\frac{2ab}{(a+b)^2}$

ג. $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}-\frac{2ab}{(a+b)^2}$

ד. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$

ה. $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-4}$

ו. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}$

ז. $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$

ח. $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$

ט. $\frac{a-b}{2(a-b)}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

י. $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

יא. $\frac{a^4+a^2}{a^3+a}$

יב. $\frac{mx-m}{nx-n}$

יג. $\frac{x^3-x}{x+1}$

יד. $\frac{9m^3-m}{9m^2-3m}$

טו. $\frac{1-\frac{a}{b}}{1+\frac{a}{b}}$

טז. $\frac{a+2-\frac{1}{a+2}}{a+2+\frac{a}{a+2}}$

יז. $\frac{a^2-2ab}{b^2+3ab}:\frac{ab-2b^2}{ab+3a^2}$

יח. $\frac{3a-7}{a^2-5a+6}+\frac{5}{a^2+a-6}-\frac{a+9}{a^2-9}$

פרק 9: פונקציות רציונאליות - משוואות רציונאליות

פונקציה רציונאלית - זוהי מנה של פולינומים.

דוגמאות: $R_1(x)=\frac{x}{x^2+1}, \quad R_2(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

פונקציה רציונאלית מוגדרת לכל x, פרט לנקודות ההתאפסות של המכנה. בדוגמאות שלמעלה: $x^2+1>0$ לכל x ולכן $R_1(x)$ מוגדרת לכל x. x^2-1 מתאפס עבור $x=1$ ו- $x=-1$, ולכן תחום ההגדרה של $R_2(x)$ הוא $x\neq\pm1$.

הערה: הפולינומים מהווים מקרה פרטי של פונקציות רציונאליות. אלו הן פונקציות רציונאליות שהמכנה שלהן שווה ל- 1.

השורשים של פונקציה רציונאלית

השורשים של פונקציה הם הערכים של המשתנה המאפסים את הפונקציה. השורשים של פונקציה רציונאלית $R(x)$. הם ערכי x המאפסים את המונה. לאחר מציאת השורשים של המונה, יש לבדוק שהם נמצאים בתחום ההגדרה של $R(x)$.

דוגמאות:

(i) $\frac{x^2-1}{x^2+1}=0$. המונה מתאפס בנקודות $x_1=1$ ו- $x_2=-1$. המכנה חיובי תמיד ולכן למשוואה שני פתרונות $x_1=1$ ו- $x_2=-1$.

(ii) $\frac{x^2-1}{x^3+1}=0$. המונה מתאפס בנקודות $x_1=1$ ו- $x_2=-1$.

הצבת השורשים במכנה: $x_1^3+1=1^3+1=2 \;;\; x_2^3+1=(-1)^3+1=-1+1=0$.

המכנה מתאפס ב- x_2 ואינו מתאפס ב- x_1. למשוואה שורש אחד $x=1$.

(iii) $\frac{2x}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}$.

שלב ראשון - העברת אגפים וחיבור הביטויים בכדי לקבל את הצורה $R(x)=0$.

$$\frac{2x}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}\Rightarrow\frac{2x}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=0\Rightarrow\frac{2x-(x+1)}{(x+1)^2}=0\Rightarrow\frac{x-1}{(x+1)^2}=0$$

המונה מתאפס כאשר $x=1$. המכנה אינו מתאפס ב- $x=1$ ולכן פתרון המשוואה הוא $x=1$.

תרגילים לפרק 9

פתרו את המשוואות הבאות:

א. $\frac{x^2+2-3x}{x^2+x-2}=0$

ב. $\frac{2x+1}{x-1}+1=0$

ג. $\frac{2x+1}{x-1}-1=0$

ד. $\frac{x^2}{(x+1)(x+2)}+\frac{3+4x}{(x+1)(x+2)}=0$

ה. $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-3)(x-1)}=0$

ו. $\frac{1}{(x+2)(x-5)}-\frac{1}{(2+x)(x-3)}=0$

ז. $\frac{1}{(x-1)(x+4)}-\frac{1}{(1-x)(x-4)}=0$

ח. $\frac{a}{4x^2-1}+\frac{a}{4x^2-4x+1}=0$

ט. $\frac{a}{4x^2-1}-\frac{a}{4x^2-4x+1}=0$

י. $\frac{a}{x(a-x)}-\frac{x}{a(a-x)}=0$

פרק 10: חזקות

הגדרת החזקה a^{α}.

א. הגדרת החזקה a^n למקרה בו a מספר ממשי כלשהו ו- n מספר שלם חיובי.

a^n הוא מכפלה של המספר a בעצמו n פעמים כלומר: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{ פעמים}}$.

a נקרא בסיס החזקה. n הוא מעריך החזקה.

דוגמאות: $2^2 = 2 \cdot 2 = 4, \quad 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9, \quad 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27, \quad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

ב. הגדרת החזקה עבור מעריך שהוא שבר חיובי $a^{\frac{1}{n}}$, n שלם חיובי. יהיו a ו- b מספרים חיוביים. $a^{\frac{1}{n}} = b \Leftrightarrow a = b^n$. במקרה זה b נקרא השורש ה- n -י של a ומסמנים $b = a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. דרשנו את חיוביות a ו- b כי אם a מספר שלילי ו- n מעריך זוגי לא קיים $\sqrt[n]{a}$. עבור $n = 2$ משמיטים את n מסימן השורש: $a^{1/2} = \sqrt{a}$.

דוגמאות: $2^3 = 8 \Leftarrow 8^{\frac{1}{3}} = 2 = \sqrt[3]{8}$, $3^4 = 81 \Leftarrow 81^{\frac{1}{4}} = 3 = \sqrt[4]{81}$

ג. הגדרת החזקה עבור מעריך רציונלי כלשהו $a^{\frac{p}{q}}$ עבור p ו- q טבעיים (שלמים חיוביים):

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = \underbrace{a^{\frac{1}{q}} \cdot a^{\frac{1}{q}} \ldots a^{\frac{1}{q}}}_{p\text{ פעמים}}.$$

דוגמא: $81^{\frac{3}{4}} = (81^{\frac{1}{4}})^3 = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$.

ד. הגדרת החזקה עבור מעריך ממשי כלשהו (α יכול להיות מספר אי רציונלי) a^{α}:

על מנת לחשב את a^{α} לוקחים מספרים רציונלים $\frac{p}{q}$ השואפים ל- α והערך אליו מתקרב $a^{\frac{p}{q}}$ מוגדר כ- a^{α}.

ה. הגדרת החזקה עבור מעריך שלילי $-\alpha$ באשר α מספר חיובי והבסיס $a \neq 0$ $\quad a^{-\alpha} = \frac{1}{a^{\alpha}}$

דוגמאות: $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}, \quad 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$.

ו. לכל בסיס a, $a^0 = 1, a^1 = a$.

ז. הבסיס הנפוץ ביותר המופיע בחזקה נקרא הבסיס הטבעי והוא מסומן באות e.

e הוא מספר אירציונלי וקיים: $e \approx 2.71828$

כללי חישוב חזקות :

הכללים שלהלן עוסקים בחזקות מהצורה a^x עבור $a > 0$. המעריך, x, מציין כל מספר ממשי.

א. $(ab)^x = a^x b^x$. **דוגמא**: $36 = 6^2 = \underbrace{(2\cdot 3)^2 = 2^2\cdot 3^2}_{\text{על פי הכלל}} = 4\cdot 9 = 36$.

ב. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. **דוגמא**: $32 = 2^5 = \underbrace{2^{2+3} = 2^2\cdot 2^3}_{\text{על פי הכלל}} = 4\cdot 8 = 32$

ג. $(a^x)^y = a^{xy}$. **דוגמא**: $64 = 8^2 = \underbrace{(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2}}_{\text{על פי הכלל}} = 2^6 = 64$.

הערות:

א. יש להבחין בחישובים בין $a^{(x^y)} \equiv a^{x^y}$ לבין $(a^x)^y = a^{xy}$. אין שוויון בין גדלים אלה. **דוגמא**: $(2^3)^2 = 2^6 = 64$, אבל $2^{3^2} = 2^9 = 512$.

ב. אין כלל שיפשט העלאה בחזקה של סכום. כלומר, אין כלל לחישוב $(a+b)^x$. במיוחד יש לשים לב לכך ששורש כל סכום **אינו** סכום השורשים.

דוגמא: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, אבל $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

ג. כללי החישוב שלמעלה תקפים, כמובן, גם עבור מספרים בהצגתם המדעית. (פרק 1).

דוגמאות:

$$(3.5\cdot 10^3)^2 = (3.5)^2\cdot (10^3)^2 = 12.25\cdot 10^{3\cdot 2} = 1.225\cdot 10\cdot 10^6 = 1.225\cdot 10^7$$

$$(2.5\cdot 10^5)^{1/2} = 2.5^{1/2}\cdot (10^5)^{1/2} = 2.5^{1/2}\cdot 10^{2\frac{1}{2}} = 2.5^{1/2}\cdot 10^{1/2}\cdot 10^2 =$$
$$= (2.5\cdot 10)^{1/2}\cdot 10^2 = 25^{1/2}\cdot 10^2 = 5\cdot 10^2.$$

ד. כאשר הבסיס שלילי לא תמיד מוגדרת החזקה. כאשר הבסיס אפס, חזקות שליליות אינן מוגדרות. לכן בסיסים אי-חיוביים הוצאו ממסגרת הטיפול בכללי חישוב בחזקות. יש לזכור עם זאת שחלק מהחזקות עבור בסיסים שליליים מוגדרות היטב.

דוגמאות: $(-2)^3 = -8$, $(-2)^2 = 4$, $(-8)^{1/3} = -2$, $(-4)^{1/2}$ לא מוגדר.

תרגילים לפרק 10

1. חשבו, ללא שימוש במחשב, את המספרים שלהלן:

א. $(7^{1/2})^4$; ב. $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; ג. 2^3+3^3 ;

ד. $8^{1/3}\cdot 81^{1/4}\cdot 36^{1/2}$; ה. $(27)^{4/3}$; ו. $(4/9)^{1/2}$;

ז. $(81)^{-3/4}$; ח. $(\frac{4}{9})^{-1/2}$; ט. $(1\frac{24}{25})^{-1\frac{1}{2}}$;

י. $64^{-1/2}+16^{-1/2}$; יא. $\dfrac{8\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)^2}{(-2)^3}$; יב. $\dfrac{\left(2^2-3^2\right)^2}{25}$;

יג. $\left(\frac{6}{2}\right)^3-9\cdot\left(6\cdot\frac{1}{2}\right)^2$; יד. $\left(-\sqrt{64}-\sqrt{64}\right)^2$; טו. $\sqrt{200}-\sqrt{128}$;

2. חשבו את הגדלים הבאים והצגו את התוצאה בצורה מדעית. בצעו חישובים מקורבים עם דיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה. לחישוב השורשים השתמשו במחשב.

$(4.81\cdot 10^2)^{1/3}$; $(1.75\cdot 10^3)^{1/2}$; $(1.75\cdot 10^4)^{1/2}$; $(3.56\cdot 10^3)^4$; $(5.29\cdot 10^2)^3$.

3. פשטו, ככל האפשר, את הביטויים שלהלן:

א. $\dfrac{(a^{2/3})^6}{(a^{4/5})^{2\frac{1}{2}}}$; ב. $(\sqrt[3]{a^2})^{2\frac{1}{2}}$; ג. $\sqrt[4]{(b^2)^{2/3}}$;

ד. $(a^{-3}b^{-\frac{1}{2}})^{-2}$; ה. $(x^{-3/4})^{2/3}$; ו. $\dfrac{(a^{-2})^3b^2}{b^{1/3}a^{1/2}}$;

ז. $\dfrac{(a^{-3}b^{-1/2})^{-2}}{(ab)^{1/4}}$; ח. $(a^4+a^6)^{1/2}$; ט. $(a^2b^3+a^3b^2)^{1/2}$;

י. $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$. יא. $\dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\frac{2}{x}}}$; יב. $\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^6}$;

יג. $\dfrac{\sqrt[3]{27x^3}}{\sqrt{x}}$; יד. $\dfrac{(ab^2)^3}{(ba^2)^2}$; טו. $(x+y)(x^{-1}+y^{-1})^{-1}$;

טז. $(x^{-0.5}-\sqrt{x})^2$; יז. $\left((a^2b)^{1/2}\right)^4$; יח. $(a^2-a)^2$;

4. הביעו את y באמצעות x כאשר:

א. $4y^2=9x^3$; ב. $8y^3=125x^4$,

ג. $9y^3=8x^2$; ד. $3y^2=\dfrac{4}{3}x^6$.

פרק 10*: פתרון שוויונים ואי-שוויונים מעריכיים

משוואה מעריכית היא משוואה בה הנעלם מופיע כמעריך חזקה.

הכלל היסודי לפתרון משוואה מעריכית הוא:

עבור $a\neq 0,1,-1$ קיים: $x=y\Leftarrow a^x=a^y$;

דוגמאות:

א. $$x=1\Leftarrow 4x=4\Leftarrow 3x-1=3-x\Leftarrow 2^{3x-1}=2^{3-x}$$ **;**

ב. $$x=2\Leftarrow \frac{x}{2}=1\Leftarrow \frac{x}{2}-3=-2\Leftarrow 3^{\frac{x}{2}-3}=3^{-2}\Leftarrow 3^{\frac{x}{2}-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$$ **;**

הכלל היסודי בפתרון אי שוויון מעריכי הוא:

אם $0<a<1$: $x>y\Leftarrow a^x<a^y$;

אם $1<a$: $x<y\Leftarrow a^x<a^y$;

דוגמאות:

א. $$2>x\Leftarrow x-2>2x-4\Leftarrow 2^{x-2}>2^{2x-4}\Leftarrow 2^{x-2}>\left(2^{-1}\right)^{4-2x}\Leftarrow 2^{x-2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2x}$$ **;**

ב. $$\Leftarrow \frac{2^4}{3^4}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-4x}>\left(\frac{4}{9}\right)^{x+3}\Leftarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{1-4x}>\frac{3^4}{2^4}\left(\frac{4}{9}\right)^{x+3}\Leftarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{1-4x}>\frac{81}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^{x+3}$$

$$\Leftarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{5-4x}>\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+6}\Leftarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{5-4x}>\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{(x+3)}\Leftarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{4+1-4x}>\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^{x+3}\Leftarrow$$

$$;\quad -\frac{1}{6}<x\Leftarrow -1<6x\Leftarrow 5-4x<2x+6\Leftarrow$$

תרגילים לפרק 10*

1. פתרו את המשוואות המעריכיות הבאות:

א. $2^{3-4x}=4$; ב. $\left(\frac{2}{3}\right)^{3-2x}=\left(1\frac{1}{2}\right)^{x-2}$; ג. $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}=27^{\frac{x}{3}+1}$;

ד. $2^{2x-1}=\frac{1}{5^{2x=1}}$; ה. $8\cdot 3^{1-x}=9\cdot 2^{2-x}$; ו. $25^{3-2y}\cdot 5^{y+1}=\frac{1}{125}$;

ז. $e^{x^2}=e^{\frac{1}{x}}$; ח. $e^{\sqrt{x}}=e^{x^3}$; ט. $\sqrt{a^{2x-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{a^x}}=\sqrt{a^{3x-2}}$;

י. $a^{\sqrt{x}}\cdot\left(a^2\right)^{1-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$; יא. $4^x+2^x=2$;

יב. $e^{3x}-2e^{2x}-e^x+2=0$; יג. $9^x-3^{x+1}+3^x=3$;

יד. $8^x-3\cdot 2^x\cdot\left(2^x+2\right)+8=0$; טו. $9^x-1=2\cdot\left(3^{-x}-3^x\right)$;

2. פתרו את אי השוויונים המעריכיים הבאים:

א. $3^{5-x}<9^{x+1}$; ב. $16^{4-3x}<8^{x-1}$; ג. $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}<\left(\frac{1}{8}\right)^{x-5}$;

ד. $\left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}<\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-2}$; ה. $125^{1-\frac{x}{3}}<25^{2x+1}$; ו. $27^{1-2x}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$;

ז. $e^{2x+5}>e$; ח. $\frac{1}{e}<e^{x^2}$; ט. $\sqrt{e^{\frac{x}{2}}}>\frac{1}{e^{x^2}}$;

י. $\left(e^x\right)^2<1$;

פרק 11: לוגריתמים

הוצאת לוגריתם היא פעולה הפוכה להעלאה בחזקה, והיא עונה על השאלה: באיזו חזקה יש להעלות בסיס נתון a בכדי לקבל תוצאה y.

בכתיב סימבולי: $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$.

הגדרה: לוגריתם לפי בסיס a של y זהו המעריך x שבו צריך להעלות את a כדי לקבל y, כלומר: $a^x = a^{\log_a y} = y \Leftrightarrow \log_a y = x$.

הלוגריתם מוגדר רק עבור בסיס a חיובי ושונה מ- 1. אפשר לחשב את הלוגריתם של כל מספר חיובי, אבל לא קיים לוגריתם של מספרים שליליים או של אפס כלומר:

$\log_a y$ מוגדר לכל $y > 0,\ a \neq 1, a > 0$.

דוגמאות: $2^5 = 32 \Leftarrow \log_2 32 = 5$; $10^2 = 100 \Leftarrow \log_{10} 100 = 2$;

$10^{-2} = 0.01 \Leftarrow \log_{10} 0.01 = -2$.

כללי חישוב לוגריתמים

א. $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_a a^x = x$, $a^{\log_a x} = x$.

ב. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$.

ג. $\log_a x^y = y \log_a x$.

דוגמאות:

(i) $5 = \log_2 32 = \underbrace{\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8}_{\text{כלל ב'}} = 2 + 3 = 5$

(ii) $2 = \log_2 4 = \underbrace{\log_2 (32/8) = \log_2 32 - \log_2 8}_{\text{כלל ב'}} = 5 - 3 = 2$

(iii) $\underbrace{0 = \log_2 1}_{\text{כלל א'}} = \underbrace{\log_2 (5/5) = \log_2 5 - \log_2 5}_{\text{כלל ב'}} = 0$

(iv) $5 = \log_2 32 = \underbrace{\log_2 2^5 = 5\log_2 2}_{\text{כלל ג'}} = \underbrace{5 \cdot 1}_{\text{כלל א'}} = 5$

החלפת בסיס הלוגריתם

בהחלפת הבסיס a בבסיס c מתקיים: $\log_a y = \dfrac{\log_c y}{\log_c a} \;\Leftarrow\; \log_a y \log_c a = \log_c y$

בפרט: $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$.

דוגמאות:

(i) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$, $\log_8 2 = \log_8 8^{1/3} = 1/3$, כלומר $\log_8 2 = \dfrac{1}{\log_2 8}$.

(ii) $\log_8 64 = 2$ (כי $8^2 = 64$). בהחלפה לבסיס 2: $\log_2 64 = 6$, $\log_2 8 = 3$,

(כי $2^6 = 64$, $2^3 = 8$) קיים: $\log_8 64 = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 8}$.

בסיסים נפוצים בשימוש בלוגריתמים

א. לוגריתם לפי בסיס 10.

סימונים מקוצרים ל- $\log_{10} x$ הם $\log_x$ או $\lg_x$.

בסיס זה נפוץ בעיקר בחישובים אריתמטיים, ובחישובים במספרים גדולים מאוד או קטנים מאוד.

ב. הלוגריתם הטבעי- הלוגריתם לפי הבסיס e, המסומנים בקיצור $\ln x$.

e, הבסיס הטבעי של הלוגריתם, הוא מספר אי-רציונאלי: בקרוב של 5 ספרות אחרי הנקודה מתקיים $e \approx 2.71828$.

הסקלה הלוגריתמית

פעמים רבות אנו נתקלים בצורך לתאר תהליכים המבוטאים באמצעות הפונקציות:

(i) $y = Nx^n$; (ii) $y = Na^x$; (iii) $y = N \log nx$;

לסיוע בהצגה הגרפית של תהליכים אלו נעשה שימוש במערכת צירים שבה, בניגוד לחלוקה הלינארית, המרחק בין הערכים באחד מהצירים או בשניהם הוא לפי ערך הלוגריתם העשרוני של המספר כלומר לפי: $L = \log x$.

בסקלה כזו, תלות לוגריתמית תיראה כקו ישר $Y = AX + B$. נראה כיצד זה קורה:

עבור הפונקציה (i) $y = Nx^n$ נוציא $\log$ משני אגפי השוויון ונקבל:

$$\log y = \log Nx^n = \log N + \log x^n = \log N + n \log x$$

אם נסמן: $Y = \log y, X = \log x, A = n, B = \log N$, נקבל שזהו אכן קשר לינארי מהצורה:

$$Y = AX + B$$

עבור הפונקציה (ii) $y = Na^x$ נוציא $\log$ משני אגפי השוויון ונקבל:

$$\log y = \log Na^x = \log N + \log a^x = \log N + x\log a$$

אם נסמן: $Y = \log y, X = x, A = \log a, B = \log N$, נקבל שזהו אכן קשר לינארי מהצורה:

$$Y = AX + B$$

עבור הפונקציה (iii) $y = N \log nx$ נקבל:

$$y = N\log nx = N(\log n + \log x) = N\log n + N\log x$$

אם נסמן: $Y = y, X = \log x, A = N, B = N\log n$, נקבל שזהו אכן קשר לינארי מהצורה:

$$Y = AX + B$$

מסקנה:

לכן, ע״מ לקבל קו ישר לפונקציה מס׳ (i), נשתמש במערכת צירים בה יש סקלה לוגריתמית בשני הצירים (**נייר לוג-לוג**), עבור הפונקציה (ii), נשתמש במערכת צירים בה יש בציר ה- y סקלה לוגריתמית ובציר ה- x סקלה לינארית רגילה (זהו **נייר סמי לוג**), ועבור הפונקציה (iii) נשתמש במערכת צירים בה יש בציר ה- x סקלה לוגריתמית ובציר ה- y סקלה לינארית (גם זה נקרא **נייר סמי-לוג**).

השימוש בסקלה לוגריתמית עדיף כאשר טווח השתנות ערכי הפונקציה הוא כמה סדרי גודל. במקרה זה ניתן לשרטט את כל תחום ההשתנות בגרף מצומצם בלי להפסיד אינפורמציה הנובעת מהאילוץ לחלוקה שווה של ערכי הפונקציה של הציר.

תרגילים לפרק 11

1. חשבו את הגדלים שלהלן בלי להשתמש במחשב:

א. $\log_{10} 1000$ ב. $\log_{10} 10^4$

ג. $\log_{10}(1/100)$ ד. $\log_2 4^3$

ה. $2\log_6 2 + 2\log_6 3$ ו. $\log_{1/2}(\log_3 81)$

ז. $\log_7 5 \cdot \log_5 49$ ח. $9^{\log_3 \sqrt{2}}$

ט. $4^{2\log_4 \sqrt{3}}$ י. $\log_3 15 - \log_3 10 + \log_3 6$

יא. $\log_2 48 - 2\log_2 6 + \log_2 3$ יב. $\log_5 75 - \log_5 40 + \log_5 8 - \log_5(2/5)$.

יג. $\dfrac{\frac{2}{3}\log 27 + 3\log 3}{\frac{1}{2}\log 9 + \frac{3}{4}\log 81}$ יד. $\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + 2\ln 2 + \ln\left(\frac{3}{7}\right)$

טו. $6^{\frac{1}{2}\log_6 5}$ טז. $e^{\ln 5}$

2. פתרו את המשוואות שלהלן. אם אפשר, מצאו פתרון מדויק , בלי עזרת המחשב. אחרת, מצאו בעזרת המחשב פתרון מקורב בדיוק של 4 ספרות.

א. $2^x = 8$ ב. $2^x = \frac{1}{2}$ ג. $(2\sqrt{2})^x = 1/2$,

ד. $10^x = 2$ ה. $e^x = 2$ ו. $2^x = 10$.

3. נתון: log7.35=0.8663. חשבו את: lg7350, log0.735, log0.000735.

4. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות שלהלן:

א. $y = \lg(x-2)$,   ב. $y = \lg(2-x)$,   ג. $y = \lg(x^2-4)$

ד. $y = \lg(x^2+4)$ ה. $y = \lg(4-x^2)$;   ו. $y = \lg(-4-x^2)$.

האם התשובות תהיינה שונות אם הלוגריתמים יחושבו לפי בסיס e במקום לפי בסיס 10?

5. ציירו בסקאלה לוגריתמית את גרף הפונקציות:

א. $y = 4 \cdot 2^x$;   ב. $y = 10^x$;   ג. $y = 8 \cdot 3^x$;

ד. $y = 5 \cdot (\frac{1}{2})^x$;   ה. $y = 3(\frac{1}{3})^x$

6. תהליך התפרקות חומר רדיואקטיבי נתון ע"י הביטוי: $Q(t)=Q_0e^{-\alpha t}$.

כאשר: Q - כמות החומר בזמן t, Q_0 - כמות החומר התחילית $(t=0)$, α - מקדם הדעיכה של החומר:

א. מהן הסקלות שבהן תבחרו לשרטט תוצאות מדידה בניסוי מסוג זה?

ב. שרטטו את התוצאות מהטבלה הבאה. מהי הכמות התחילית? מה ערך α?

זמן (שעות)	1	1.5	3	5	8	13	17	21	24
כמות (גר')	915	787	501	275	112	25	7.5	2.3	0.9

7. מצאו את כל ערכי x עבורם מוגדר הביטוי:

א. $\ln\left(\ln\frac{x+2}{x-7}\right)$;

ב. $\frac{1}{\sqrt{\ln(|x|-1)}}$

פרק 11*: פתרון שוויונים ואי-שוויונים לוגריתמיים

משוואה המכילה את הלוגריתם של הנעלם נקראת משוואה לוגריתמית.

הכלל הבסיסי בפתרון משוואות לוגריתמיות הוא: $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$;

דוגמאות:

א.

$$\log_{10} x + \log_{10}(x+4) = \log_{10}(x+1) + \log_{10}(x+2) \Rightarrow \log_{10}(x(x+4)) = \log_{10}((x+1)(x+2)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(x+4) = (x+1)(x+2) \Rightarrow x^2 + 4x = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x = 2$$

ב.

$$3\ln x + \ln(x^2) = \ln 27 + 2\ln x \Rightarrow \ln x + \ln(x^2) = \ln 27 \Rightarrow \ln(x^3) = \ln 27 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$$

הכלל הבסיסי בפתרון אי שוויון לוגריתמי הוא:

אם $0 < a < 1$ **:** $\log_a x < \log_a y \Rightarrow x > y$;

אם $1 < a$ **:** $\log_a x < \log_a y \Rightarrow x < y$;

דוגמאות:

א. $\log_2 x < 2\log_2 2 \Rightarrow \log_2 x < \log_2 2^2 \Rightarrow x < 2^2 \Rightarrow x < 4$

ב. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) \Rightarrow 2x-1 > 3x+1 \Rightarrow -2 > x$

תרגילים לפרק 11*

1. פתרו את המשוואות הלוגריתמיות הבאות:

א. $\log_2 x = 2\log_2 4$; ב. $\log_3(\log_2 x) = 1$;

ג. $\log_2\left(\frac{5x+1}{x+2}\right) = 3$; ד. $\log_2(2+\log_3(x-2)) = 2$;

ה. $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$; ו. $\log_3(4x-1)+\log_3 x = 1$;

ז. $\log_{10}(x^2-1) = 2\log_{10}(x-1)+\log_{10} 3$;

ח. $\log(x+5)-\log(x-3) = \log(x-1)-\log(x-5)$;

ט. $2\log(x-2) = \log(x+1)+\log(x-4)$;

י. $\ln^2 x = 3$; יא. $\ln^2 x = \ln x$; יב. $(\ln x-1)^2 = 4$;

יג. $\log(x^2-1) = \log(x-1)^2 - \log(x-4)$;

יד. $\ln^2(x-1) - 2\ln(x-1)^2 - 5 = 0$.

2. פתרו את אי השוויונים הלוגריתמיים הבאים:

א. $\log_5(2x-3) > \log_5(x+2)$; ב. $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$;

ג. $\ln(2x^2-3x) > \ln(x^2-2)$; ד. $\ln(x^2-5x+1) > \ln(2x+9)$;

ה. $\ln(x^2+3) > 1$; ו. $\ln(2x^2-3x) > 0$;

ז. $\ln(2x^2+x-6) < 0$; ח. $\ln(x^2+5x-1) < 1$;

ט. $\ln^2 x < 1$; י. $\ln^2 x > 9$;

יא. $\log_{1/2}\left(\frac{x+2}{x-1}\right) < \log_{1/2}(x^2+x-2)$; יב. $2\log_9(x+5) < \log_3\left(\frac{x-2}{x+9}\right)$.

פרק 12: פתרון אי-שוויונים

פתרון האי-שוויון ממעלה ראשונה: $ax+b\ge cx+d$

שלב ראשון - העברת אגפים (כינוס): $(a-c)x\ge d-b$. כיוון אי-השוויון נשמר.

שלב שני - חילוק במקדם של x. בשלב זה יתכנו 3 מצבים:

(i) $a-c>0$. אז כיוון האי-שוויון נשמר בחילוק, והתוצאה: $x\ge (d-b)/(a-c)$.

(ii) $a-c<0$. אז כיוון האי-שוויון מתהפך בחילוק, והתוצאה: $x\le (d-b)/(a-c)$.

(iii) $a-c=0$. אז, אם $d-b=0$ אי-השוויון מתקיים לכל x. אם $d-b\ne 0$ אי השוויון אינו מתקיים לאף x.

דוגמאות:

(i) $3x+5\le x+2 \Leftarrow 2x\le -3 \Leftarrow x\le -3/2$.

(ii) $3x+5<4x+7 \Leftarrow -x<2 \Leftarrow x>-2$.

פתרון אי-שוויונים ממעלה שניה $ax^2+bx+c\ge 0$ (או ≤ 0), $a\ne 0$

הבסיס לפתרון הוא התאור הגרפי של הפרבולה $y=ax^2+bx+c$;

כאשר $a>0$, הפרבולה היא פרבולה מחייכת, ולכן היא חיובית מחוץ לשורשים ושלילית בין השורשים. כלומר, אם x_1 ו- x_2, $x_1<x_2$ הם פתרונות המשוואה $ax^2+bx+c=0$, אז $y<0$ כאשר $x_1<x<x_2$, ואילו $y>0$ כאשר $x>x_2$ או $x<x_1$.

אם הפרבולה אינה חותכת את ציר ה- x אז היא מקבלת ערכים חיוביים לכל x.

כאשר $a<0$, מתהפכים הסימנים שלמעלה: הפרבולה מקבלת ערכים שליליים מחוץ לשורשים, וערכים חיוביים בין השורשים.

כאשר יש לפתור אי-שוויון ממעלה 2, פותרים ראשית את המשוואה המתאימה, ואז בוחרים את התחומים המקיימים את אי-השוויון הנדרש.

הערה: אי שוויון עם מקדם שלילי ל- x^2 אפשר להפוך לאי-שוויון עם מקדם חיובי ל- x^2, על ידי העברת אגפים. יש לשים לב שכאשר כופלים אי-שוויון במספר שלילי, כיוון אי-השוויון מתהפך.

דוגמאות:

(i) $x^2-3x+2\le 0$. המשוואה המתאימה: $x^2-3x+2=0$. שורשיה: $x_1=1$, $x_2=2$.

הפרבולה $y=x^2-3x+2$ שלילית בין השורשים. ולכן הפתרון הוא: $1\le x\le 2$.

(ii) $-x^2+x+2<0$. פתרונות המשוואה $-x^2+x+2=0$ הם: $x_1=-1$, $x_2=2$.

הפרבולה $y=-x^2+x+2$ שלילית מחוץ לשורשים. התשובה: $x>2$ או $x<-1$.

(iii) אי-שוויונים שפתרונם מיידי: $x^2+1>0$ מתקיים לכל x.

(iv) ל- $x^2+1<0$ אין אף פתרון.

פתרון אי-שוויונים פולינומיאליים: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \ldots + a_1 x^1 + a_0 \ge 0$

שלב א' - פותרים את המשוואה המתאימה.

שלב ב' - מסדרים את השרשים לפי סדר עולה. השורשים מחלקים את הישר לקטעים זרים.

פולינום אינו מחליף את סימנו בין השרשים. לכן די לבדוק את הסימן בנקודה אחת ברווח בכדי לדעת את הסימן בכל הרווח.

דוגמא: א. $(x-1)(x+2)^2(x+4)>0$.

שורשי הפולינום $x_1=1, \quad x_2=-2, \quad x_3=-4$.

יש לבדוק את סימן הפולינום ב 4 הקטעים הבאים: $(-\infty,-4),(-4,-2),(-2,1),(1,\infty)$

ע"י הצבת נקודה אחת בכל קטע:

$P(-5)=(-6)(-3)^2(-1)>0 \Leftarrow P(x)>0$ על הרווח $x<-4$

$P(-3)=(-4)(-1)^2(1)<0 \Leftarrow P(x)<0$ על הרווח $-4<x<-2$

$P(0)=(-1)\cdot(2)^2(4)<0 \Leftarrow P(x)<0$ על הרווח $-2<x<1$

$P(2)=1\cdot 4^2\cdot 6>0 \Leftarrow P(x)>0$ על הרווח $x>1$.

$\Leftarrow$ פתרון אי-השוויון: $x<-4$ או $x>1$

ב. פתרון אי-השוויון $(x-1)(x+2)^2(x+4)\le 0$ הוא: $-4\le x\le 1$;

ג. פתרון אי-השוויון $(x-1)(x+2)(x+4)>0$ הוא: $x>1$ וגם $-4<x<-2$.

הערה: ניתן לראות כי בכל שלוש הדוגמאות שהובאו כאן, יש לכל אי השויונים אותה משוואה מתאימה, ולכן גם אותם שורשים: $x_1=1, \quad x_2=-2, \quad x_3=-4$. בכל זאת פתרונות שלושת אי השוויונים שונים. נסו להבין ממה נובעים ההבדלים ומה הקשר בין הפתרונות השונים.

פתרון אי-שוויונים רציונאליים $\dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0} \ge 0$

שלב ראשון - הבאת אי-השוויון לאחת מהצורות: $R(x)>0, R(x)<0, R(x)\le 0, R(x)\ge 0$

כלל מנחה - פונקציה רציונאלית יכולה להחליף סימן רק בשורשים שלה, שהם נקודות ההתאפסות של המונה, או בנקודות שבהן אינה מוגדרת, כלומר נקודות ההתאפסות של המכנה.

השלבים בפתרון אי-השוויון מסתמכים על כלל מנחה זה .

שלב שני - מציאת השורשים של המונה ושל המכנה (הנקודות בהן $R(x)=0$ והנקודות בהן $R(x)$ אינו מוגדר.

שלב שלישי - כמו בפתרון אי-שוויונים פולינומיאליים , מסדרים את הערכים שנמצאו בשלב השני בסדר עולה. הסימן של $R(x)$ נשאר קבוע בכל אחד מהרווחים שהתקבל.

יש לבדוק את הסימן ע"י הצבת נקודה בכל מרווח שהתקבל.

דוגמא:

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)} \ge 0 \Leftarrow \frac{(x-2)+(x+1)}{(x+1)(x-2)} \ge 0 \Leftarrow \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2} \ge 0$$

המונה מתאפס בנקודה $x_1 = \frac{1}{2}$. המכנה מתאפס עבור $x_2 = -1$ ו- $x_3 = 2$.

בדיקת סימנים:

בתחום: $x < -1$: $R(-2) = \frac{-5}{(-1)(-4)} < 0 \Rightarrow R(x) < 0$ עבור $x < -1$.

בתחום: $-1 < x < \frac{1}{2}$: $R(0) = \frac{-1}{1\cdot(-2)} > 0 \Rightarrow R(x) > 0$ עבור $-1 < x < \frac{1}{2}$.

בתחום $\frac{1}{2} < x < 2$: $R(1) = \frac{1}{2\cdot(-1)} < 0 \Rightarrow R(x) < 0$ עבור $1/2 < x < 2$.

בתחום $2 < x$: $R(3) = \frac{5}{4\cdot 1} > 0 \Rightarrow R(x) > 0$ עבור $2 < x$.

נוח לאסוף את כל התוצאות בטבלה לפני שמסכמים את התוצאות.

(קו נטוי מסמן את נקודות אי-הגדרה של $R(x)$)

x			-1			1/2			2		
R(x)	-	-	/	+	+	0	-	-	/	+	+

סיכום התוצאות: פתרון אי-השוויון הוא $-1 < x \le 1/2$ או $2 < x$.

הערה: יש לשים לב לכך שהקצה $x = \frac{1}{2}$ נכלל בפתרון מכיוון שהפונקציה מתאפסת בו. הקצוות האחרים, בהם הפונקציה אינה מוגדרת, אינם נכללים בפתרון.

תרגילים לפרק 12

1. פתרו את אי השוויונים הבאים :

א. $5x+3<2x+3$; ב. $6x+5\geq x-5$;
ג. $2x+3\leq -3x-7$; ד. $2x+3\leq 3x+7$;
ה. $2x+3\leq 2x+7$; ו. $2x+3>2x+5$.

2. פתרו את אי-השוויונים הבאים :

א. $x^2+x-6>0$; ב. $x^2-2x+4<0$;
ג. $x^2+2x-3\leq 0$; ד. $x^2-2x+1>0$;
ה. $x^2\leq 0$; ו. $3+5x-2x^2>0$;
ז. $x^2+x>3x-1$; ח. $-4x^2+4x-1<0$.

3. פתור את אי-השוויונים הבאים :

א. $x^2<x^4$; ב. $(x^2-1)(x+4)<0$;
ג. $(x-1)(x+1)(x-2)>0$; ד. $(x-1)^2(x+2)(x-2)\leq 0$;
ה. $x(x-1)(x+1)^2(x-2)>0$; ו. $(x-4)^{10}(x+1)^3>0$;
ז. $(x-1)^3(x+1)^2(x+2)^3<0$; ח. $x^3+x^2+x+1>2+2x$.

4. פתרו את אי-השוויונים הבאים :

א. $\dfrac{2x-1}{3-x}<0$ ב. $\dfrac{(x+4)(x-1)}{(x+1)(x-2)}\geq 0$; ג. $\dfrac{(x-1)^2(x+4)^3}{(x+1)^2(x-2)}\geq 0$;

ד. $\dfrac{(x+1)^3(x+4)(x-1)}{(x-2)}\geq 0$; ה. $\dfrac{2}{x-1}>2$; ו. $\dfrac{x-5}{7-2x}\leq 2$;

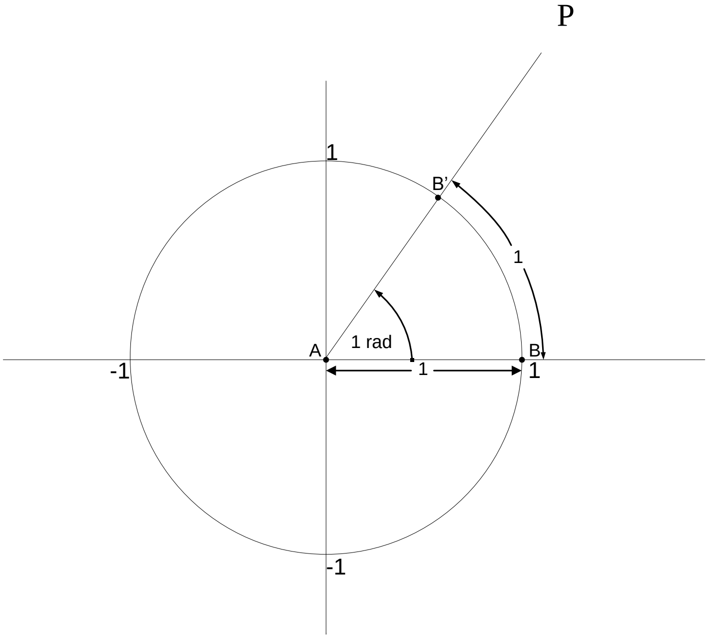
ז. $\dfrac{1}{x}-1<x+1$; ח. $\dfrac{2}{x+2}\geq\dfrac{4}{x-2}$; ט. $x>\dfrac{11}{x+10}$;

י. $\dfrac{1}{x+3}\leq\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$; יא. $\dfrac{x^4-2x^3-20x^2-21x-18}{x^3-1}\geq 0$;

יב. $\dfrac{1}{x+3}\geq\dfrac{1}{x^6+3x^3+2}$; יג. $\dfrac{3x-1}{x-1}<\dfrac{8}{x-2}$; יד. $\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^3-x^2-x+1}>0$;

פרק 13: הפונקציות הטריגונומטריות

הגדרה: נתונה מערכת צירים קרטזית רגילה ומעגל שרדיוסו בגודל יחידת אורך אחת (מעגל יחידה) ומרכזו בראשית הצירים בנקודה $A=(0,0)$. תהי P קרן היוצאת מראשית הצירים . כאשר הקרן מסתובבת, נעות כל הנקודות שעליה על גבי מעגלים שמרכזם בראשית הצירים. כאשר הקרן P נמצאת על ציר ה-x הנקודה $B=(1,0)$ נמצאת עליה. כאשר הקרן מסתובבת נגד כוון השעון נוצרת זוית α בין הקרן לבין הכוון החיובי של ציר ה-x .



כתוצאה מסבוב זה נעה הנקודה B שהיתה בהתחלה בנקודה $(1,0)$ על מעגל היחידה .

אם תנועת הקרן היא נגד כיוון השעון, הזוית מוגדרת כזוית חיובית . אם התנועה היא עם כוון השעון , הזוית מוגדרת כזוית שלילית. ניתן לבצע מספר סיבובים ולכן תיתכנה זויות בכל גודל למשל, זוית הנוצרת בשני סיבובים שלמים של הקרן סביב ראשית הצירים היא זוית בת 720°

הרדיאן: כאשר אורך הקשת שאותה עברה הקרן P שווה אף הוא ליחידה נאמר כי הקרן עשתה סיבוב של רדיאן אחד, כלומר הזוית שנוצרה בין הקרן לבין הכוון החיובי של ציר ה-x היא בת $\alpha=1_{radian}$.

הערה: במעגל שרדיוסו r , זוית בת 1_{radian} היא זוית הנשענת על קשת באורך r כיון שהיקף המעגל שווה ל-$2\pi r$, נקבל שבסבוב שלם נוצרת זוית בת: $\frac{2\pi r}{r}=2\pi_{radian}$. בסיבוב שלם של מעגל נוצרת זוית בת 360° ומכאן הקשר בין מעלות לרדיאנים:

$$1_r=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \Leftarrow \left(\frac{\pi}{180}\right)_r=1^\circ \Leftarrow 2\pi_{radian}=360^\circ$$

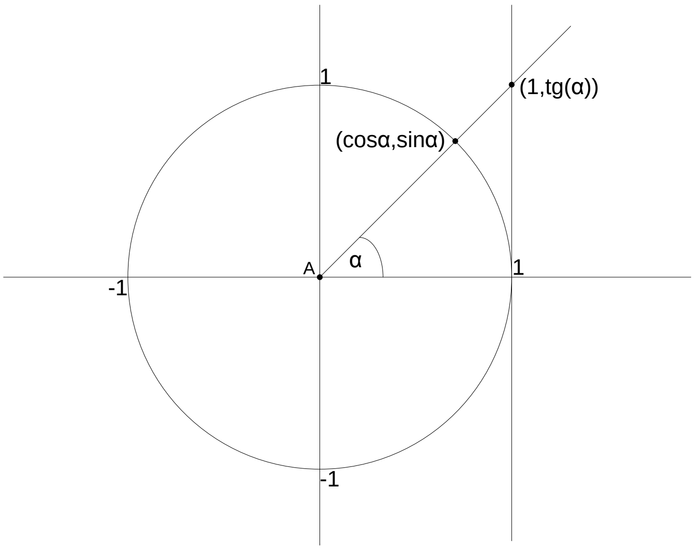
דוגמאות: $30^\circ = \frac{\pi}{6}$; $45^\circ = \frac{\pi}{4}$; $60^\circ = \frac{\pi}{3}$; $90^\circ = \frac{\pi}{2}$;

$180^\circ = \pi$; $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$; $360^\circ = 2\pi$;

הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות:

הפונקציות סינוס וקוסינוס:

נתונה מערכת צירים ומעגל יחידה שמרכזו בראשית הצירים. נתאר לעצמנו קרן מסתובבת שקדקודה בראשית הצירים. לאחר סיבוב של α רדיאנים, הקרן חותכת את המעגל בנקודה $P_1 = (x_1, y_1)$.



פונקצית הקוסינוס המסומנת cos מתאימה לזוית α את שיעור ה-x (השיעור הראשון) של נקודת החתוך P_1.

כלומר: $\cos\alpha = x_1$.

פונקצית הסינוס המסומנת sin מתאימה לזוית α את שיעור ה-y (השיעור השני) של נקודת החתוך P_1. כלומר: $\sin\alpha = y_1$.

הפונקציות טנגנס וקוטנגנס:

כעת נעביר בנקודה $(1,0)$ משיק למעגל היחידה. הקרן המסתובבת חותכת את **המשיק למעגל** בנקודה $P_2 = (1, y_2)$.

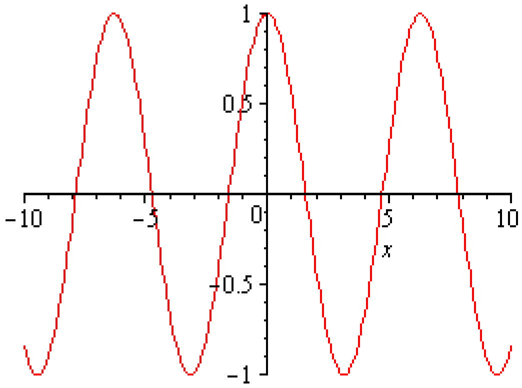
פונקצית הטנגנס המסומנת tg **מתאימה** לזוית α את שיעור ה-y של נקודת החתוך P_2.

כלומר: $tg\alpha = y_2$.

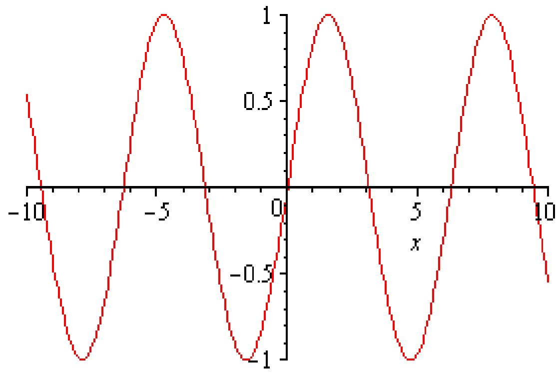
פונקצית הקוטנגנס המסומנת ctg מוגדרת כך: $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

התאור הגרפי של הפונקציות הטריגונומטריות :

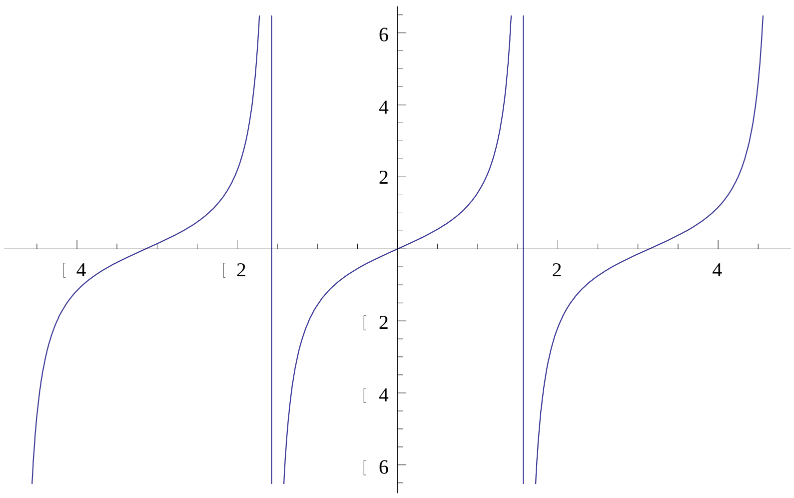
גרף הפונקציה $y=\cos x$ הוא :



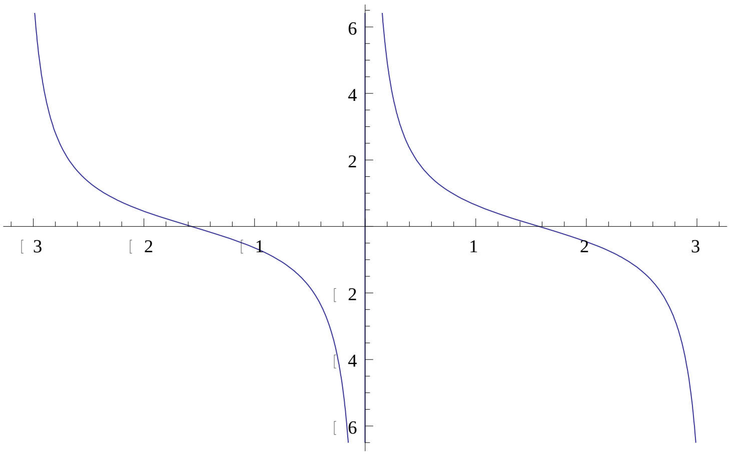
גרף הפונקציה $y=\sin x$ הוא :



גרף הפונקציה $y=tgx$ הוא : (הערה : הקוים האנכיים אינם חלק מהפונקציה.)



גרף הפונקציה $y = ctgx$ הוא :



מעצם הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות, אנו רואים שהן מקיימות תכונה מיוחדת הנקראת תכונת המחזוריות שהיא התכונה הבאה :

הגדרה: פונקציה $f(x)$ תקרא **פונקציה מחזורית** אם קיים מספר קבוע $c > 0$ המקיים עבור כל מספר x בתחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x+c) = f(x)$. אם קיים מספר חיובי קטן ביותר בעל תכונה זו c_0 קוראים למספר c_0 זה המחזור המינימלי של הפונקציה.

במקרה של הפונקציות הטריגונומטריות מתקיימים הכללים הבאים :

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha \quad \text{וגם} \quad \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

לכל k מספר שלם . ו לכן במקרה זה המחזור המינימלי הוא : $c_0 = 2\pi$.

מסקנה: הפונקציות $\sin$ ו- $\cos$ הן פונקציות מחזוריות עם מחזור מינימלי : $c_0 = 2\pi$.

$tg(\alpha + \pi k) = tg(\alpha + \pi) = tg\alpha$ וגם $ctg(\alpha + \pi k) = ctg(\alpha + \pi) = ctg\alpha$ לכל k מספר שלם . ולכן במקרה זה המחזור המינימלי הוא : $c_0 = \pi$.

מסקנה : הפונקציות tg ו- ctg הן פונקציות מחזוריות עם מחזור מינימלי : $c_0 = \pi$.

זויות מיוחדות :

(i) $$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; tg\frac{\pi}{4} = ctg\frac{\pi}{4} = 1 \; ;$$

(ii) $$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = 1/2 \; ; \; tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \; ; \; \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ;$$

$$tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \; ; \; ctg\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \; ; \; ctg\frac{\pi}{6} = \frac{3}{\sqrt{3}} \; ;$$

(iii) $$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = \sin\frac{\pi}{6} = 1/2 \; ; \; tg\left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \; ;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; ctg\left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right) = ctg\frac{\pi}{6} = \frac{3}{\sqrt{3}} \; ;$$

נוסחאות טריגונומטריות בסיסיות:

א. $-1 \le \cos\alpha \le 1$, $-1 \le \sin\alpha \le 1$ **;**

ב. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$;

ג. $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, $\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$;

ד. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. (נובע ממשפט פיתגורס).

ה. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \Rightarrow \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

ו. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

ז. $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$.

פתרון משוואות טריגונומטריות:

הכלל המוביל בפתרון משוואה טריגונומטרית הוא, כי תחילה יש למצוא את כל פתרונות המשוואה במחזור אחד ולאחר מכן יש להוסיף לכל אחד מהפתרונות שקבלנו את מחזוריות הפונקציה.

דוגמאות:

1.) פתרו את המשוואה $\sin x = 0$ **:**

פתרון: $\sin x = 0$ כאשר $x = 0, \pi$. לכן כל הפתרונות של המשוואה הם:

$x_1 = 0 + 2\pi k$, $x_2 = \pi + 2\pi k$, k מספר שלם.

במקרה מיוחד זה ניתן לאחד את כל הפתרונות ומקבלים סה"כ: $x = \pi k$.

2.) פתרו את המשוואה: $tgx = 1$:

פתרון: $tgx = 1$ כאשר $x = \frac{\pi}{4}$. לכן כל פתרונות המשוואה הם: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$,. k מספר שלם.

3.) פתרו את המשוואה: $\cos 2x = -1$:

פתרון: $\cos 2x = -1$ כאשר $2x = \frac{3\pi}{2}$. לכן כל הפתרונות של המשוואה הם:

$2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, k מספר שלם.

תרגילים לפרק 13

1. הפכו את הזוויות שלהלן ממעלות לרדיאנים ולהפך:
20^0, 40^0, 50^0, 70^0, 80^0 ; $\pi/6, \pi/5, \pi/4, \pi/3$.

2. α היא זווית ברביע הראשון של מערכת צירים. נתון כי: $\sin\alpha = \frac{12}{13}$.
חשבו את $\cos\alpha$ ואת $\tan\alpha$. מהו הגודל של α?

3. א. בשעת הצהריים, כאשר השמש נמצאת בזווית של $\frac{70\pi}{180}$ רדיאן מעל האופק, אורך הצל שמטיל עץ מסויים הוא 50 ס"מ. מהו גובה העץ?
ב. מה יהיה אורך הצל לפנות ערב, כאשר השמש נמצאת בזווית של $\frac{\pi}{6}$ רדיאן מעל האופק?

4. שרטטו את הגרפים של הפונקציות הטריגונומטריות הבאות:
א. $f(x)=\sin(x+5)$; ב. $g(x)=\sin(2x)$; ג. $h(x)=3\sin x$;
ד. $k(x)=\cos(2x-3)$; ה. $t(x)=-\cos x$; ו. $l(x)=tgx+2$;

5. הוכיחו כי הפונקציות הבאות מחזוריות ומצאו את מחזורן היסודי:
א. $f(x)=\cos^3(3x)$; ב. $g(x)=\frac{\sin(2x)}{3+\cos^2 x}$;
ג. $h(x)=\sin(2x)\cdot\sin(6x)$;

6. האם הפונקציה: $f(x)=x+\sin x$ מחזורית? נמקו תשובתכם!

7. פתרו את המשוואות הבאות:
א. $\sin x = 1$; ב. $\cos x = \frac{1}{2}$; ג. $\sin x = -1$; ד. $\cos(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;
ה. $tgx = 1$; ו. $tg3x=\sqrt{3}$; ז. $|\cos(x)| = \frac{2}{3},\ 0\le x\le 2\pi$;
ח. $\left|\cos(2x)-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4},\ 0\le x\le 5\pi$; ט. $\sin x + 2\cos x = 1$;
י. $\cos 2x - \sin x = 0$; יא. $\sin^2 2x + \sin x = 1$; יב. $\cos^2 2x - \sin^2 2x = 1$;
יג. $\cos^4 2x - \sin^4 2x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; יד. $tg(2x-\pi) = -1$.

8. חשבו את הערכים הבאים של הפונקציות הטריגונומטריות:
$\sin(22.5^\circ), \sin(120^\circ), \cos(345^\circ), \sin(105^\circ), \cos(105^\circ), \sin(210^\circ), \cos(210^\circ)$.

נושא 14: הערך המוחלט

הערך המוחלט של מספר a, המסומן $|a|$ מוגדר כך: $|a|=\begin{cases} a & a\ge 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$

כאשר מסמנים את a על ציר המספרים הממשיים, $|a|$ הוא המרחק של a מהאפס, בלי להתחשב בכיוון שבו a נמצא (ימין או שמאל). לכן הערך המוחלט של מספר הוא תמיד חיובי בין אם המספר a חיובי ובין אם הוא שלילי.

דוגמא: $|2|=2$, $|-3|=3$.

פתרון שוויון עם ערך מוחלט- $|x|=b \Leftrightarrow x=b$ **או** $x=-b$.

$|f(x)|=b \Leftrightarrow f(x)=b$ **או** $f(x)=-b$.

פתרון אי שוויון עם ערך מוחלט- $|x|\le b \Leftrightarrow -b\le x\le b$ ($|x|<b \Leftrightarrow -b<x<b$)

$|x|\ge b \Leftrightarrow x\ge b$ או $x\le -b$ ($|x|>b \Leftrightarrow x>b$ או $x<-b$)

בכדי לפתור את אי השוויון $|x-a|\le b$ צריך למצוא את כל המספרים על הציר שמרחקם מ- a אינו עולה על b. כלומר: $|x-a|\le b \Leftarrow -b\le x-a\le b \Leftarrow a-b\le x\le a+b$.

דוגמאות:

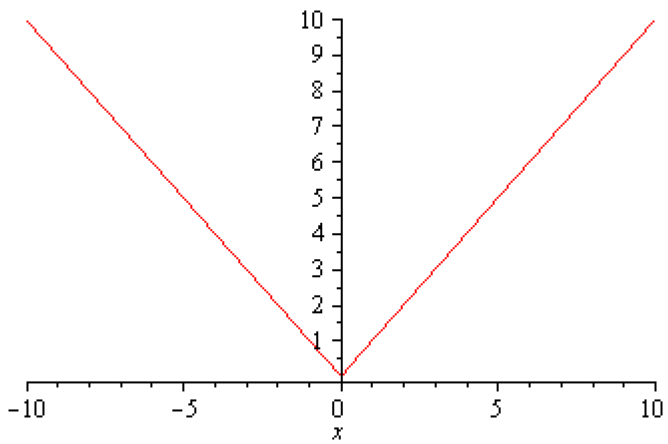
א. $|x-2|\le 3 \Leftarrow -3\le x-2\le 3 \Leftarrow -1\le x\le 5$.

ב. $|x-1|>5 \Leftarrow x-1>5$ או $x-1<-5 \Leftarrow x>6$ או $x<-4$.

פונקצית הערך המוחלט $f(x)=|x|$ היא הפונקציה המקיימת:

$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

גרף פונקצית הערך המוחלט הוא:



אי השוויון $|f(x)|\le A$ שקול לאי-שוויון כפול: $-A\le f(x)\le A$.

אי השוויון $|f(x)|\ge A$ שקול לשני אי-שוויונים: $f(x)\ge A$ או $f(x)\le -A$.

תרגילים לפרק 14

1. רשמו את הפונקציות שלהלן מבלי להזדקק לסימון של הערך המוחלט, ושרטטו גרפים מקורבים של הפונקציות.

א. $y=|x-2|$, ב. $y=|1-2x|$; ג. $y=|x^2-4|$.

2. פתרו את אי-השוויונים שלהלן:

א. $|x-3|>10$; ב. $|x-1|\le 2$;

ג. $|x^2-3x+2|\le 0$; ד. $|(x-1)(x+3)|>0$;

ה. $|x^2+4x+4|\le 1$; ו. $\left|\dfrac{x+1}{2x-1}\right|>1$;

ז. $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|<1$; ח. $|x-1|-|x+2|<5$;

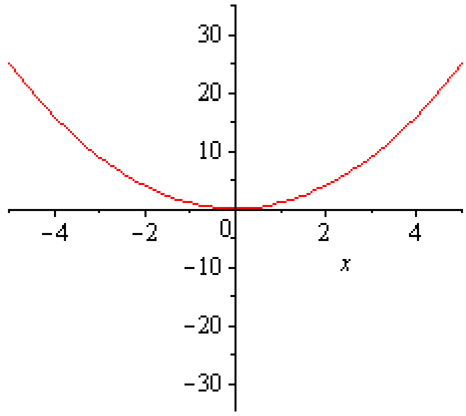
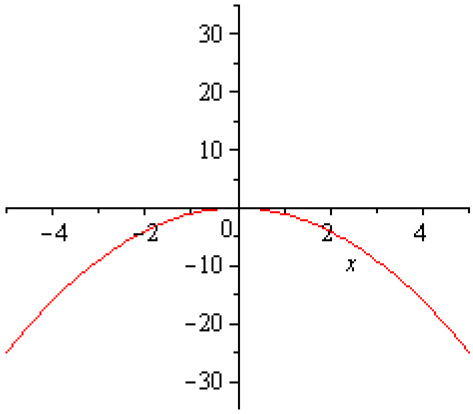
ט. $x+|x-1|\ge 3$; י. $|x-4|-|x-7|\le 3$;

פרק 15: פעולות על גרפים

נתון גרף של פונקציה $y=f(x)$.

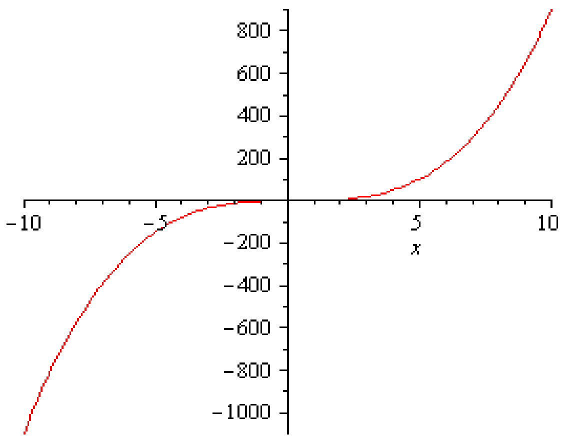
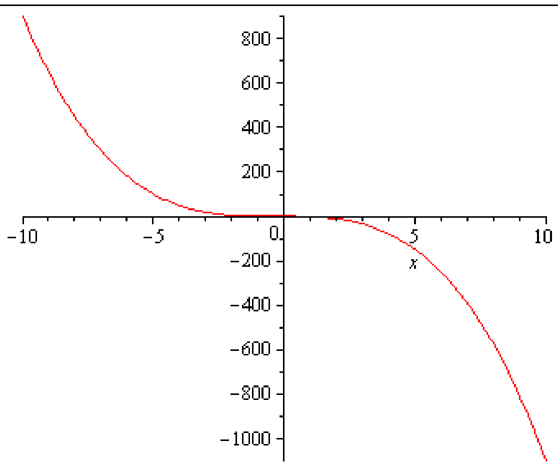
1) הגרף של הפונקציה $y=-f(x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה $y=f(x)$ ביחס לציר ה- x.

דוגמה:

גרף הפונקציה $y=f(x)=x^2$ הוא:	גרף הפונקציה: $y=-f(x)=-x^2$ הוא:
	

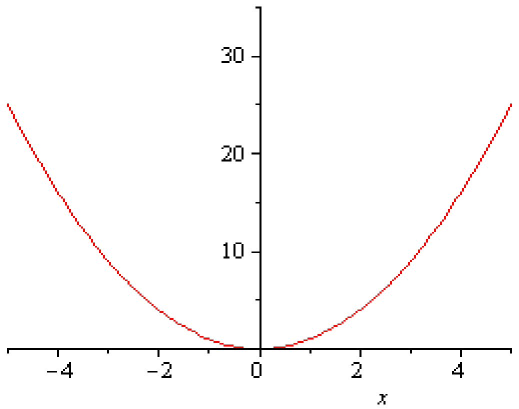
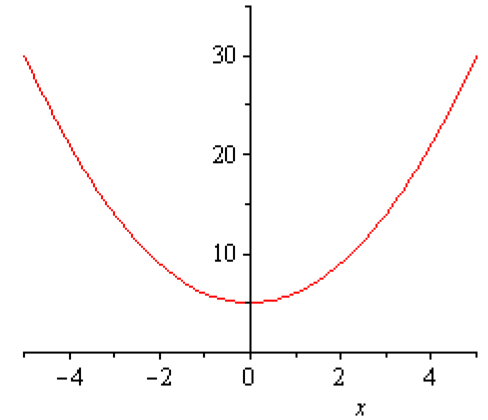
2) הגרף של הפונקציה $y=f(-x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה $y=f(x)$ ביחס לציר ה- y.

דוגמה:

גרף הפונקציה $y=f(x)=x^3-x^2+1$ הוא:	גרף הפונקציה $y=f(-x)=(-x)^3-(-x)^2+1=-x^3-x^2+1$ הוא:
	

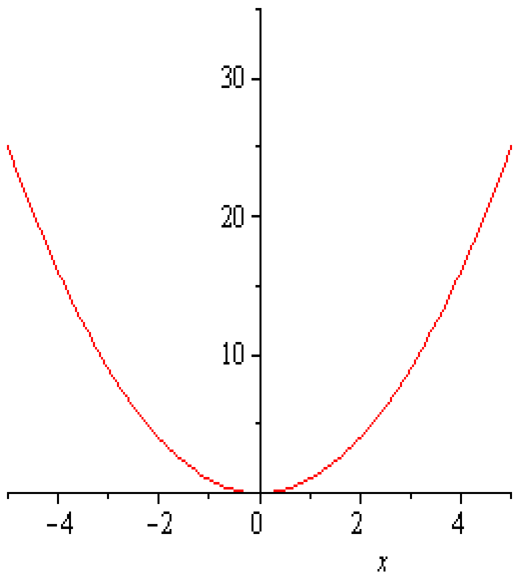
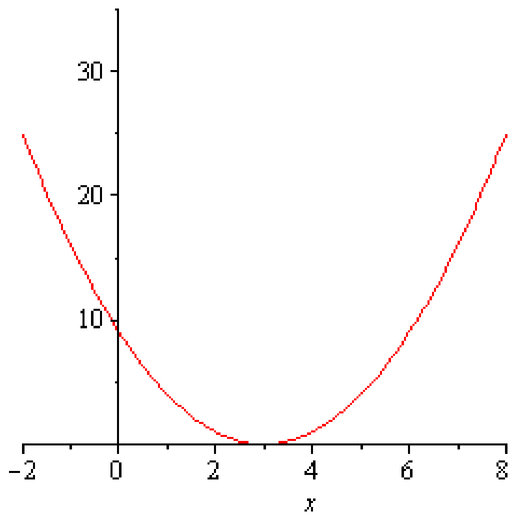
3) הגרף של הפונקציה $y=f(x)+a$ הוא הזזה של גרף הפונקציה $y=f(x)$ ב- a יחידות כלפי מעלה לאורך ציר ה- y (אם a חיובי) וכלפי מטה לאורך ציר ה- y (אם a שלילי).

דוגמא:

גרף הפונקציה $y=f(x)=x^2$ הוא:	גרף הפונקציה $y=f(x)+5=x^2+5$ הוא:
	

4) הגרף של הפונקציה $y=f(x-a)$ הוא הזזה של גרף הפונקציה $y=f(x)$ ב- a יחידות ימינה לאורך ציר ה- x (אם a חיובי) ושמאלה לאורך ציר ה- y (אם a שלילי).

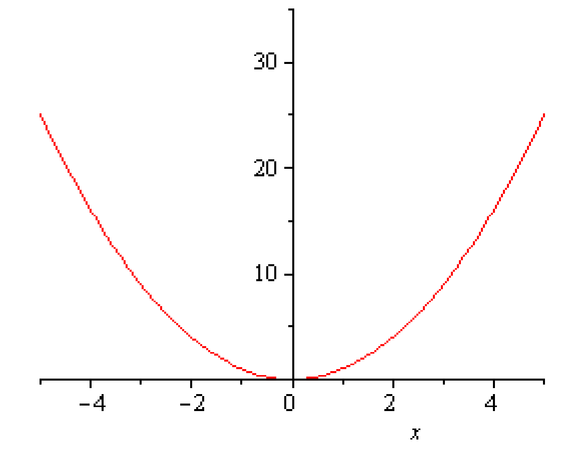
דוגמא:

גרף הפונקציה $y=f(x)=x^2$ **הוא:**	**גרף הפונקציה** $y=f(x-3)=(x-3)^2$ **הוא:**
	

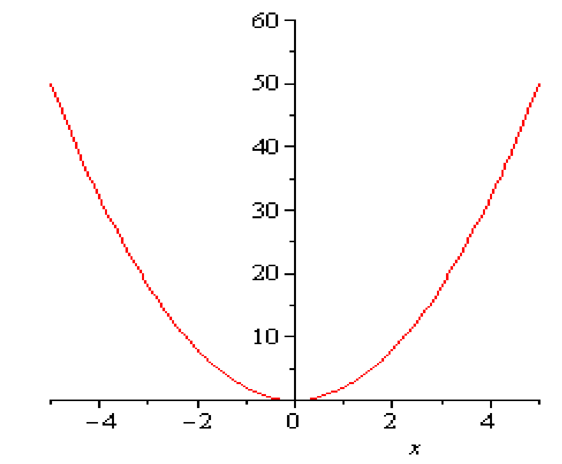
5) הגרף של הפונקציה $y = Af(x)$ הוא מתיחה של גרף הפונקציה פי A יחידות לאורך ציר ה- y.

דוגמא:

גרף הפונקציה $y = f(x) = x^2$ הוא:



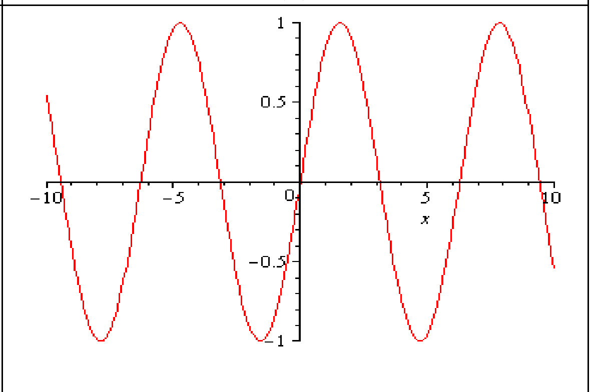
גרף הפונקציה $y = 2f(x) = 2x^2$ הוא:



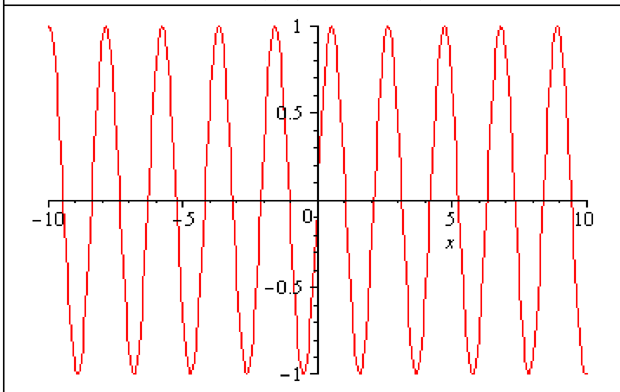
6) הגרף של הפונקציה $y = f(ax)$ הוא כווץ של גרף הפונקציה $y = f(x)$ לאורך ציר ה- x אם $a > 1$ ומתיחה לאורך ציר ה- x אם $0 < a < 1$.

דוגמא:

גרף הפונקציה $y = f(x) = \sin x$ **הוא:**

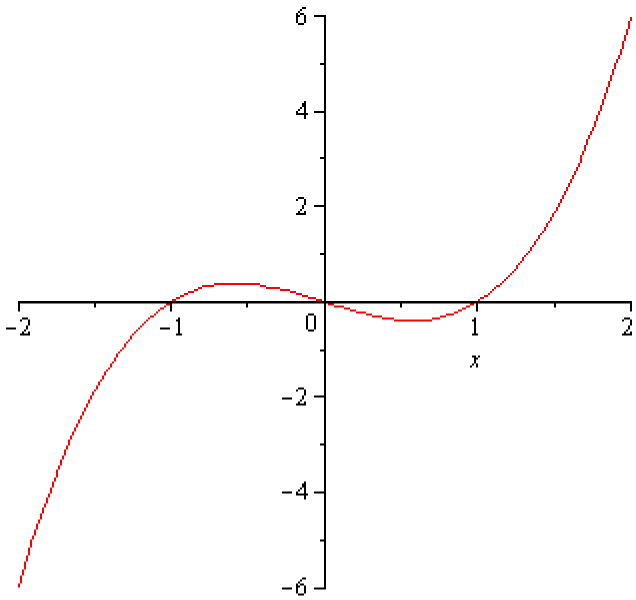
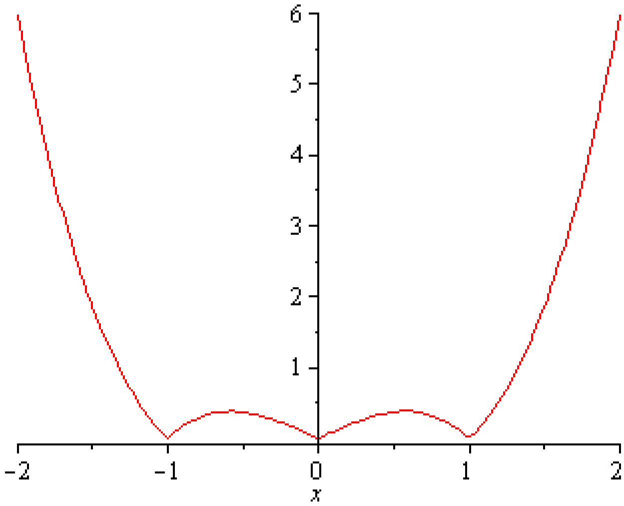


גרף הפונקציה $y = f(3x) = \sin(3x)$ **הוא:**



7) הגרף של הפונקציה $y=|f(x)|$ הוא גרף הפונקציה $y=f(x)$ בתחום ערכי x שעבורם $f(x)>0$ והוא גרף הפונקציה $-f(x)$ בתחום ערכי x שעבורם $f(x)<0$.

דוגמא :

גרף הפונקציה $y=f(x)=x^3-x$ **הוא:**	**גרף הפונקציה** $y=\lvert f(x)\rvert=\lvert x^3-x\rvert=\begin{cases} x^3-x & -1<x<0, x>1 \\ x-x^3 & x<-1, 0<x<1 \end{cases}$
	

תרגילים לפרק 15

1. נתונה הפונקציה $y = f(x) = \cos(x)$, מצאו וציירו את הפונקציות הבאות:

א. $g(x) = \cos(\pi x)$; ב. $h(x) = 3\cos(x)$;

ג. $k(x) = \cos(x-\pi)$ ד. $u(x) = \cos(x) - 5$;

2. נתונה הפונקציה $y = f(x) = x^2$, מצאו וציירו את הפונקציות הבאות:

א. $g(x) = -x^2$; ב. $h(x) = \frac{x^2}{2}$;

ג. $k(x) = (x-5)^2$ ד. $u(x) = x^2 + 1$;

3. נתונה הפונקציה $y = f(x) = x^4$, מצאו וציירו את הפונקציות הבאות:

א. $f(-x)$; ב. $-f(x)$; ג. $f(x+2)$;

ד. $f(3x)$; ה. $f\left(\frac{x}{2}\right)$; ו. $f(x) + 2$;

4. ענו על שאלה 3 עבור הפונקציה $y = f(x) = \sin x$.

תשובות לתרגילים נבחרים

פרק 1 (עמוד 6)

1) $3.72,\ 3.72\cdot 10,\ 3.72\cdot 10^{-3},\ 3.72\cdot 10^{5}$.

2) $-0.0032,\ 0.00001,\ 0.0128,\ 1280$

3) א) 0.1018

ג) $1.728\cdot 10^{6}$

4) $\log\left(5\cdot 10^{3}\right)=3.699\ ;\ \log\left(5\cdot 10^{-3}\right)=0.699-3$

5) א) $0.01\ ,\ 0.005\%$

ד) $10^{-6}\ ,\ 0.005\%$

פרק 1* (עמוד 9)

1) א) כן ב) לא ג) לא ד) לא.

2) א) $n<3$ ד) $n>m$

4) I) א), ג).

5) II) ג), ה).

6) א), ג).

7) א) $[-1,5]$, ד) $(-\infty,-1)$.

פרק 2 (עמוד 13)

1) $y=2x+2$

3) ב.) I) $\sqrt{13}$, II) $\sqrt{45}$.

ג.) I) $y=\frac{2}{3}x$, II) $y=-2x-8$.

ד.) I) $(-6,-4)$, II) $(3,-14),(-5,2)$.

ה.) II, III הם קוים מקבילים.

פרק 3 (עמוד 15)

1) א. (I) : $(0,0)$ ב. חיתוך (I) עם (II) : $(3,2)$.

2) א) $y=-2x+4$. ב) $(1,2)$.

פרק 4 (עמוד 19)

2) (i) $y=x^{2}-5x+4$

א) מינימום בנקודה : $\left(\frac{5}{2},\frac{-9}{4}\right)$.

ב) חיתוך עם ציר ה- x : $(1,0),(4,0)$. חיתוך עם ציר ה- y : $(0,4)$.

ג) $(5,4),(-0.5,6.75)$.

(ii) $y=-2x^2+4x-2$

א) מכסימום בנקודה : $(-1,0)$.

ב) חיתוך עם ציר ה- x : $(-1,0)$. חיתוך עם ציר ה- y : $(0,-2)$.

3) א) $x_1=-\frac{1}{2}\,,\ x_2=2$.

ב) $x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ה) $x_{1,2}=\pm 2$.

ו) אין פתרונות.

פרק 5 (עמוד 21)

2) א) x^2-2x-3 .

ג) $a^2+b^2+2a+2b+2ab$.

3) א) $a(a+3)$.

ג) $4(a-0.5)^2$

ד) $(2a+3)(2a-3)$.

ה) $ab(a+1)^2$.

ו) $(2b+1)^3$

ט) $(a-b)(a^2+b^2)$.

י) $(x-2)(x-11)$

יא) $(x+1)(x^2+3)$.

טו) $x^2(7-11x)(7+11x)$.

יח) $40(5a+1)$

כ) $(a+b)(a^2-ab+b^2+a+b)$.

כא) $15x(7x+3)$

כב) $(a+b)(3a+b)$.

פרק 6 (עמוד 24)

3) א) $x=1$.

ב) $x=-1\,,\ x=\frac{1}{2}$.

ג) אין פתרון.

פרק 7 (עמוד 26)

1) א) $x_1=-1\,,\ x_2=2$. ג) $x_1=\frac{5}{2}\,,\ x_2=\frac{4}{3}$.

ה) $x_1=0\,,\ x_2=3,\ x_3=-3$.

ז) $x_1=-2\,,\ x_2=\frac{-1+\sqrt{57}}{4}\,,\ x_3=\frac{-1-\sqrt{57}}{4}$.

ח) $x_1 = 0, x_2 = 1$.   ט) $x_1 = \sqrt{2}\,,\, x_2 = -\sqrt{2}$.

יא) $x_1 = 1\,,\; x_2 = -3$.

פרק 7* (עמוד 30)

1) $\dfrac{3x^5 + 2x^2 + 4x + 2}{x+1} = 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + 5 - \dfrac{3}{x+1}$

2) $\dfrac{x^5 + x - 1}{x^2 + 2} = x^3 - 2x + \dfrac{5x-1}{x^2+2}$.

3) $a = -9$.   4) $a = 5\,,\, b = 8$.

פרק 8 (עמוד 33)

1) ב) 1 ;   ג) $\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2$;   ד) $\dfrac{2a}{a^2 - b^2}$;

ה) $\dfrac{-b-4}{(a+b)(a-4)}$;   ז) $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$;   ח) $\dfrac{4ab}{a^2 - b^2}$;

י) $\dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$;   יא) $a, a \neq 0$;   יב) $\dfrac{m}{n}, x \neq 1$;

טו) $\dfrac{b-a}{b+a}$;   טז) $\dfrac{1}{2}$;   יז) $\dfrac{a^2}{b^2}$;

פרק 9 (עמוד 35)

א) $x = -1$;   ב) $x = 0$;   ג) $x = -2$;   ד) $x = -3$;

ה) $x = 2.5$ ו) אין פתרון ;   ז) $x = 0$;

ח) אם $a \neq 0$, $x = 0$; אם $a = 0$ הפתרונות הם כל $x \in R$, ;

ט) אם $a \neq 0$ אין פתרון ; אם $a = 0$ הפתרונות הם כל $x \in R, x \neq \pm\dfrac{1}{2}$;

פרק 10 (עמוד 38)

1) א) 49 ;   ב) 2 ;   ג) 35 ;   ד) 36 ;

ז) $\dfrac{1}{27}$;   ט) $\dfrac{125}{343}$;   יא) -4 ;   טו) $2\sqrt{2}$;

3) א) a^2 ;   ד) $a^6 b$;   ז) $a^{23/4} \cdot b^{3/4}$;   י) $\dfrac{ab}{a+b}$;

טו) xy ;   טז) $\dfrac{(1-x)^2}{x}$;

4) א) $y = \dfrac{3}{2}x^{3/2}$;   ד) $y = \dfrac{2}{3}x^3$.

פרק 10* (עמוד 41)

1) א) $x=\frac{1}{4}$; ג) אין פתרון ; ד) $x=\frac{1}{2}$; ז) $x=1$; ט) $x=\frac{3}{5}$;

2) א) $(1,\infty)$; ד) $(-3,\infty)$; ו) $(-\infty,1)$; ט) $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup(0,\infty)$.

פרק 11 (עמוד 45)

1) ג) -2 ; ד) 6 ; ה) 2 ; ו) -2 ; ז) 2 ; ח) 2 ; י) 2 ; יא) 2 ; טז) 5 ;

2) ג) $x=-\frac{2}{3}$; ה) $x=\ln 2$;

3) ב) $x=8$; ד) $x=11$;

5) ב) $x<2$; ה) $-2<x<2$;

פרק 11* (עמוד 48)

1) א) $x=16$; ב) $x=8$; ד) $x=6$; ה) $x=4$; ו) $x=-2$; ט) $x=8$;

2) ב) $x>\frac{3}{2}$; ו) $x>\frac{3-\sqrt{17}}{2}\cup x>\frac{3+\sqrt{17}}{2}$;

פרק 12 (עמוד 52)

1) ה) R ; ו) אין פתרון ;

2) א) $(-\infty,-3)\cup(2,\infty)$; ח) $x\neq\frac{1}{2}$;

3) א) $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; ד) $[-2,2]$;

4) א) $\left(\frac{1}{2},3\right)$; ד) $(-\infty,-4)\cup\lfloor-1,1\rfloor\cup(2,\infty)$;

פרק 13 (עמוד 58)

1) $r\frac{\pi}{90}=20°$; $\frac{\pi}{3}=60°$;

3) א) 1.37 ; ב) 2.37 ;

5) ב) מחזוריות π .

7) א) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; ד) $x=-\frac{\pi}{8}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{8}+\pi k$;

פרק 14 (עמוד 60)

2) א) $(-\infty,-7)\cup(13,\infty)$; ח) R ; ט) $[2,\infty)$;